ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2019. május 7.

MATEMATIKA SZERB NYELVEN

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Важне информације

Формални захтеви:

1. Молимо вас да задатак исправљате **хемијском оловком другачије боје** од оне коју користи кандидат, тако да буде **читљиво**.
2. Међу сивим правоугаоницима који су поред задатака у првом је максималан број бодова за тај задатак, а у други **правоугаоник** наставник који исправља уписује постигнут **број бодова**.
3. У случају **потпуно исправног решења** вас молимо, да поред уписаног максималног броја бодова лулицом означите да сте приметили дату мисаону целину и оценили је као добру.
4. У случају решења са недостатком/грешком, молимо да поред **означавања грешке** на матурски рад напишете и појединачни, **делимични број бодова**. Уколико помаже боље праћење исправке задатка, може се прихватити и означавање делимичног броја бодова које је кандидат изгубио. У решењу не сме да остане такав део, за који после исправљања није јасно да ли је тачан, нетачан или сувишан.
5. Приликом исправљања **користите следеће ознаке.**
   - тачан корак: *лулица*
   - принципијелна грешка: *двоструко подвлачење*
   - рачунска грешка или грешка која није принципијелна: *једном подвлачење*
   - тачан корак извршен лошим почетним подацима: *испрекидана* или *превучена лулица*
   - образложење, набрајање са недостатком или други недостатак: *ознака за недостатак*
   - неразумљиви део: *знак питања* и/или *таласаста линија*
6. Осим скица (цртежа), делове који су написани **графитном оловком** наставник не треба да вреднује (оцењује).

Садржајни захтеви:

1. Код појединих задатака смо дали бодовање за више начина решавања. Уколико се нађе тачно **решење различито од наведених**, потражите у упутству делове који се подударају и на основу тога извршите бодовање.
2. Бодови у упутству се могу даље **разложити, само уколико у упутству није наведено другачије**. Међутим, број бодова који се додељује може бити само цео број.
3. Ако у решењу има **рачунске грешке**, нетачности, бодови се не дају само на онај део где је ученик начинио грешку. Ако са погрешним делимичним резултатом даље ради тачним поступком, а проблем за решавање се у суштини не мења, додељују му се даљи делимични бодови.

4. У случају **принципијелне грешке** у оквиру једне мисаоне целине (то се према упутству означава двоструком линијом) ни за формално тачне математичке поступке се бодови не додељују. Уколико ученик наставља са радом и као почетни податак узима лоше решење које је добио због принципијелне грешке, а даље тачно рачуна у следећој мисаоној целини или делу питања, онда за тај део добија максималан број бодова, уколико се проблем за решавање у суштини није променио.
5. Ако се у упутству за решавање у загради налази нека **напомена** или **мерна јединица**, и у случају њиховог недостатка се решење сматра потпуним.
6. Од покушаја решења за један задатак **вреднује се она варијанта коју је кандидат означио**. Приликом исправљања задатка једносмислено означите који покушај (варијанту) сте вредновали, а који нисте.
7. За решења се **наградни бодови** (бодови који прелазе прописани максимални број за дати задатак или његов део) **не могу доделити**.
8. За један задатак или део задатка укупан додаљен број бодова **не може бити негативан**.
9. За оне делимичне прорачуне, делимичне кораке, који су са грешкама али их кандидат при решавању задатка заиста није искористио **не одузимају се бодови**.
10. Приликом поступка решавања **коришћење дигитрона – без даљег математичког образложења – се прихвата за извршавање следећих математичких операција**: сабирање, одузимање, множење, дељење, степеновање, кореновање, n!, израчунавање $\binom{n}{k}$, замена табела који се налазе у логаритамским таблицама (sin, cos, tg, log и њихове инверзне функције), давање приближне вредности за бројеве π и e, одређивање корена једначине другог степена сређене на нулу. Без даљег математичког образложења је дозвољено коришћење дигитрона за израчунавање одређених статистичких показатеља (средња вредност и дисперзија), али само у случају да се текстом задатка искључиво не захтева приказивање детаљних прорачуна у вези тога. **У другим случајевима се прорачуни извршени дигитроном сматрају за кораке без образложења, па се за то не додељују бодови.**
11. Коришћење **слика (скица)** као доказа (на пример очитавање података мерењем) се не прихвата.
12. Код израчунавања **вероватноће** (уколико текст задатка не захтева другачије) може се прихватити и тачан одговор дат у процентима.
13. Уколико текст задатка не захтева да се изврши заокруживање, може се прихватити **рационалним и тачним заокруживањем** добијено делимично и коначно решење које одступа од онога које је дато у упутству.
14. **Од означених задатака у испитном делу II/Б се од 3 задатка вреднују само решења за 2 задатка.** Кандидат је уписао у квадрат – вероватно – редни број задатка чије вредновање неће ући у укупан број бодова. Према томе, евентуално дато решење за означени задатак ни не треба исправљати. Ако није једносмислено јасно за који задатак кандидат не жели да се бодује, онда ће задатак који се не бодује аутоматски бити онај који је последњи по истакнутом редоследу.

I.

1.		
$x_1 = 1$, $x_2 = -2$	2 бода	
Укупно:	**2 бода**	

2.		
3	2 бода	
Укупно:	**2 бода**	

3.		
$x = 4$	2 бода	
Укупно:	**2 бода**	

4.		
$V = 1000\ \text{cm}^3$	1 бод	$V = 1\ \text{dm}^3$
$r^2\pi \cdot 20 = 1000$ $(r > 0)$	1 бод	$r^2\pi \cdot 2 = 1$
$r^2 \approx 15{,}9$	1 бод	$r^2 \approx 0{,}159$
$r \approx 4$ cm	1 бод	$r \approx 0{,}4$ dm
Укупно:	**4 бода**	

5.		
A: тачно **B**: нетачно **C**: тачно	2 бода	*у случају 2 тачна одговора 1 бод, за 1 тачан одговор додељује се 0 бодова.*
Укупно:	**2 бода**	

6.		
$2^3 \cdot 7^2 \cdot 19$ $(= 7448)$	2 бода	
Укупно:	**2 бода**	

7.		
Место минимума 1,	1 бод	
Вредност минимума 5.	1 бод	
Укупно:	**2 бода**	

8.		
-1	2 бода	
Укупно:	**2 бода**	

9.		
0, π, 2π	2 бода	
Укупно:	**2 бода**	

10.		
За количник низа q је $q^3 = 27$.	1 бод	
одатле је $q = 3$.	1 бод	
збир првих пет чланова низа $2 \cdot \frac{3^5 - 1}{3 - 1} =$	1 бод	$2+6+18+54+162$
$= 242$.	1 бод	
Укупно:	**4 бода**	

11.		
$K\ (0; 3)$	2 бода	
$r = 5$	1 бод	
Укупно:	**3 бода**	

12. први начин		
(Ако не узимамо у обзир редослед изабирања) од 32 ученика двоје можемо изабрати на $\binom{32}{2}$(= = 496)- начина (број свих догађаја-случаја).	1 бод	*(Узимајући у обзир и редослед) број свих могућих избора је* $32 \cdot 31$ (= 992).
Од 14 девојчица две можемо изабрати на $\binom{14}{2}$(= 91) начина (број повољних случајева).	1 бод	*Одатле је број повољних* $14 \cdot 13$ (= 182).
Тражена вероватноћа је $\frac{\binom{14}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{91}{496} \approx 0{,}183$.	1 бод	$\frac{182}{992}$
Укупно:	**3 бода**	

12. други начин		
Вероватноћа да ћемо прво изабрати девојчицу је: $\frac{14}{32}$.	1 бод	
Вероватноћа да ћемо после тога опет изабрати девојчицу је: $\frac{13}{31}$.	1 бод	
Тражена вероватноћа је призвод ове две вероватноће, односно отприлике 0,183.	1 бод	
Укупно:	**3 бода**	

II. A

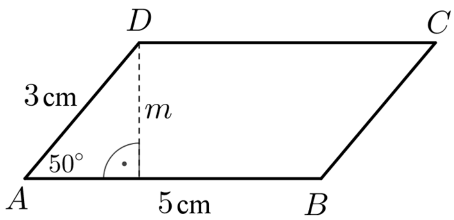
13. a) **први начин**		
(Означимо цену улазнице у форинтама за одрасле са x, а цену улазнице за децу са y.) На основу текста задатка: $\begin{cases} x+4y=4300 \\ 2x+5y=6350. \end{cases}$	1 бод	
Из прве једначине ћемо изразити x: $x = 4300 – 4y$.	1 бод	*обе стране прве једначине помножимо са 2:* $\begin{cases} 2x+8y=8600 \\ 2x+5y=6350. \end{cases}$
Заменом у другу једначину: $2\cdot(4300 – 4y) + 5y = 6350$.	1 бод	*од прве једначине одузимамо другу:* $3y = 2250$.
сређивањем и решавањем: $y = 750$ Ft је цена дечије улазнице, а	1 бод	
$x = 1300$ Ft је цена улазнице за одрасле.	1 бод	
Контрола на основу текста задатка: Једна улазница за одраслу особу и четворо деце улазнице $(1300+4\cdot 750=)$ 4300 Ft, а две за одрасле и пет дечијих $(2\cdot 1300+5\cdot 750=)$ 6350 Ft.	1 бод	
Укупно:	**6 бодова**	

Напомена: Ако кандидат не напише текстуални одговор (а ни не изврши идентификацију непознатих), , зато губи укупно 1 бод.

13. a) **други начин**		
Цена једне улазнице за једног одраслог и једно дете је $6350 – 4300 = = 2050$ Ft.	2 бода	*Цена улазнице за* 2 *одрасле особе и* 8 *деце је* $2\cdot 4300 = 8600$ Фт.
Цена једне улазнице за једног одраслог и четворо деце је 4300 ФТ, па је тако цена за три дечије улазнице 4300 – 2050 = 2250 Фт.	2 бода	*Цена улазнице за* 2 *одрасле особе и* 5 *деце је* 6350 Ft*, дакле цена за* 3 *дечије улазнице је* 8600 – 6350 = 2250 Фт.
Једна дечија улазница кошта 750 Фт	1 бод	
Једна улазница за одраслу особу кошта 1300 Фт.	1 бод	
Укупно:	**6 бодова**	

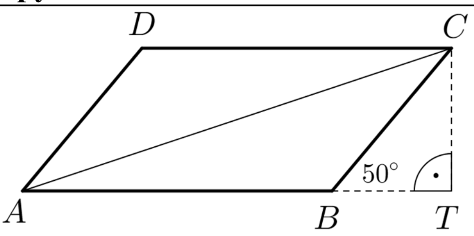
Напомена: Ако кандидат ни у једном одговору не напише јединицу мере, зато губи укупно 1 бод.

13. b)		
Множећи нето цену са 1,27 добијамо бруто цену.	1 бод	*Овај бод се даје и онда ако се ова мисао види тек из решења.*
Нето цена је: $6350 : 1{,}27 = 5000$ (Фт) .	1 бод	
Износ ПДВ-а у 6350 Фт је: $6350 - 5000 = 1350$ Фт.	1 бод	
ПДВ је $\frac{1350}{6350} \cdot 100 \approx$	1 бод	$\left(1 - \frac{1}{1{,}27}\right) \cdot 100$
$\approx 21{,}26\%$ бруто цене.	1 бод	
Укупно:	**5 бодова**	

14. a) први начин		
 Висина на страницу *AB* је $m = 3 \cdot \sin 50° \approx$	1 бод	
$\approx 2{,}3$ cm.	1 бод	
Површина паралелограма је $T \approx 5 \cdot 2{,}3 =$	1 бод	
$= 11{,}5$ cm^2.	1 бод	
Укупно:	**4 бода**	

14. a) други начин		
Површина паралелограма је $T = 3 \cdot 5 \cdot \sin 50° \approx$	1 бод	
$\approx 11{,}5$ cm^2.	1 бод	
Висина *m* на страницу *AB* је	1 бод	
$m \approx \frac{11{,}5}{5} = 2{,}3$ cm.	1 бод	
Укупно:	**4 бода**	

14. b) први начин		
Угао паралелограма код темена B је 130°.	1 бод	
Исписивањем косинусне теореме на страницу *AC* у троуглу *ABC*: $AC^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 130°$.	1 бод	
одатле је Ebből $AC^2 \approx 53{,}28$,	1 бод	
па је $AC \approx 7{,}3$ cm.	1 бод	
Укупно:	**4 бода**	

14. b) **други начин**		
 Нека тачка T буде пресек праве AB и праве која је нормална на праву AB и пролази кроз тачку C. $BT = 3 \cdot \cos 50° \approx 1,93$ (cm).	2 бода	$BT \approx \sqrt{3^2 - 2,3^2}$
Исписивањем Питагорине теореме у правоуглом троуглу ATC $AC^2 (= AT^2 + CT^2) \approx 6,93^2 + 2,3^2$,	1 бод	
одакле је $AC \approx 7,3$ cm.	1 бод	
Укупно:	**4 бода**	

14. c)		
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} =$	1 бод	
= **a** + **b** + **a** = 2**a** + **b**	1 бод	
$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} =$	1 бод	
$= -(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) = -$ **a** $-$ **b**	1 бод	
Укупно:	**4 бода**	

15. a)		
обим скупа података је (11 – 3 =) 8,	1 бод	
медијана је 6,	1 бод	
просек је 7,	1 бод	
дисперзија је $\sqrt{\dfrac{(9-7)^2 + (3-7)^2 + ... + (10-7)^2}{9}} =$	1 бод	*Овај бод се додељује и ако кандидат тачно израчуна дигитроном.*
$= \sqrt{\dfrac{64}{9}} = \dfrac{8}{3} \approx 2,67.$	1 бод	
Укупно:	**5 бодова**	

15. b)		
Фреквенција догађаја A (збир бацања је 5, 6, 7 или 8) је 3,	1 бод	
па је релативна фреквенција $\dfrac{3}{9}$.	1 бод	
Укупно:	**2 бода**	

15. c)		
Бацајући истовремено две коцкице, број елементарних случајева (догађаја) једнаке вероватноће је: 36 (број свих случајева)	1 бод	
5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 3 + 2 = 4 + 1, то су 4 могућности. 6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3 = 4 + 2 = 5 + 1, то је 5 могућности. 7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 4 + 3 = 5 + 2 = 6 + 1, то је 6 могућности. 8 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4 = 5 + 3 = 6 + 2, то је 5 могућности.	3 бода*	
Број повољних случајева је њихов збир, значи 20.	1 бод	
Вероватноћа догађаја *A* је $\frac{20}{36} \approx 0{,}56$.	1 бод	
Укупно:	**6 бодова**	

Напомене:
*1. Ако кандидат не прави разлику између две коцкице, делимични резултати у таквој мисаоној целини су редом 2, 3, 3, 3, а онда му се од 3 бода означених са * даје 1 бод.*
2. Ако кандидат, на пример, даје тачан одговор на основу доње табеле, даје му се потпуни број бодова.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

II. Б

16. a)		
Тврдња је тачна,	1 бод	
зато што је у понедељак, четвртак, петак и у суботу највиша дневна температура била виша од 30^0C, а тих дана су продали више од 1200 улазница.	1 бод	
Укупно:	**2 бода**	

16. b)		
Обрнута тврдња: *Ако је број продатих улазница био већи од 1200, онда је тог дана температура била виша од 30^0C.*	1 бод	
Нетачна тврдња,	1 бод	
зато што су нпр. у уторак (или недељу) продали више од 1200 улазница, а највиша дневна температура је била испод 30^0C.	1 бод	
Укупно:	**3 бода**	

16. c) **први начин**		
Треба израчунати запремину праве призме чија основа је трапез.	1 бод	*Овај бод се даје и онда ако се ова мисао види тек из решења.*
Основице трапеза су 2,1 и 1,3 м, а један крак (висина трапеза) је 50 м.	1 бод	21 dm, 13 dm, 500 dm
Површина трапеза је $T = (2{,}1 + 1{,}3) \cdot 50 : 2 = 85$ (m^2).	1 бод	8500 dm^2
Висина призме је 16,5 m,	1 бод	165 dm
а запремина $V = 85 \cdot 16{,}5 = 1402{,}5$ (m^3),	1 бод	1 402 500 dm^3
са траженим заокруживањем 1400 m^3.	1 бод	*Овај бод се не даје ако кандидат не заокружује или погрешно заокружује.*
Укупно:	**6 бодова**	

16. c) **други начин**		
(Треба израчунати збир запремина једне праве призме чија основа је троугао и једног квадра.) Запремина квадра је $1{,}3 \cdot 50 \cdot 16{,}5 = 1072{,}5$ (m^3).	1 бод	1 072 500 dm^3
Површина правоуглог троугла $(2{,}1 - 1{,}3) \cdot 50 : 2 = 20$ (m^2).	1 бод	2000 dm^2
Висина призме је 16,5 m,	1 бод	165 dm
а запремина је $20 \cdot 16{,}5 = 330$ (m^3),	1 бод	330 000 dm^3
Тражена запремина је збир горе наведених, значи 1402,5 (m^3),	1 бод	1 402 500 dm^3
са траженим заокруживањем 1400 m^3.	1 бод	*Овај бод се не даје ако кандидат не заокружује или погрешно заокружује.*
Укупно:	**6 бодова**	

16. d)		
Осам такмичара можемо распоредити у осам стаза на 8!(=40 320) начина (број свих случајева, одн. догађаја)	1 бод	
Ако Матију и Сару посматрамо уједно, онда „седам“ пливача могу да се распореде на 7! (= 5040) начина.	2 бода	*Матија и Сара на седам места могу да доспеју један поред другог. Осталих шест такмичара могу да се распореде у сваком случају на 6!(=720) начина.*
Матија и Сара у датом распореду могу и да замене места па је тако број повољних догађаја $2 \cdot 7!$ (= 10 080).	1 бод	$2 \cdot 7 \cdot 6!$

Тражена вероватноћа је $\frac{2\cdot 7!}{8!}=$	1 бод	
$\left(=\frac{10080}{40320}\right)=0{,}25.$	1 бод	
Укупно:	**6 бодова**	

17. a)		
Дати бројеви образују аритметички низ, чија разлика је 3, а први члан је 1.	1 бод	*Овај бод се даје и онда ако се ова мисао види тек из решења.*
$a_{56}=a_1+55d=$	1 бод	
$=166$	1 бод	
Треба решити једначину $1456 = 1 + (n-1)\cdot 3$.	1 бод	
$n-1=485$	1 бод	
486. члан низа је 1456.	1 бод	
Укупно:	**6 бодова**	

17. b) први начин		
Преобразићемо једначину дате праве у: $-3x+y=1$.	1 бод	
Један нормални вектор праве је $(-3; 1)$,	1 бод	*Овај бод се даје и онда ако се ова мисао види тек из решења.*
Један нормални вектор праве која је нормална на њу је $(1; 3)$.	1 бод	
Једначина нормалне праве је: $x+3y=(1\cdot 14+3\cdot 56=)182$.	2 бода	
Укупно:	**5 бодова**	

17. b) други начин		
Нагиб дате праве је 3,	1 бод	*Овај бод се даје и онда ако се ова мисао види тек из решења.*
а нагиб праве која је нормална на њу је $-\frac{1}{3}$.	1бод	
(тражећи у облику $y=-\frac{1}{3}x+b$ једначину праве која се захтева у задатку) $56=-\frac{1}{3}\cdot 14+b$	1 бод	$y=m(x-x_0)+y_0$, *дакле* $y=-\frac{1}{3}(x-14)+56.$
$b=\frac{182}{3}$	1 бод	
Једначина праве која се тражи: $y=-\frac{1}{3}x+\frac{182}{3}$.	1 бод	
Укупно:	**5 бодова**	

17. c)		
Дата функција је у случају $x < -1$ строго монотоно опадајућа,	1 бод	*Ови бодови се дају и у случају одговарајуће скице, одн. цртежа.*
у случају $x > -1$ строго монотоно растућа.	1 бод	
Најмања вредност функције је $x = -1$ на месту 0.	1 бод	
Функција броју – 14 придружује 39.	1 бод	$f(56) > f(-14)$
а броју 56 придружује 171.	1 бод	
Скуп вредности [0; 171].	1 бод	
Укупно:	**6 бодова**	

18. a)		
Од шест различитих цифара се може направити 10 $\cdot$ 9 $\cdot$ 8 $\cdot$ 7 $\cdot$ 6 $\cdot$ 5 = 151 200 лозинки.	2 бода	
Толико лозинки програм може да провери за $\frac{151\,200}{1{,}5 \cdot 10^7} \approx$	1 бод	
≈ 0,01 секунди.	1 бод	
Укупно:	**4 бода**	

18. b) **први начин**		
Број свих лозинки типа **Б** је: 26^8.	1 бод	*За проверавање свих лозинки овога типа је потребно отприлике 3,867 сати,*
Број свих лозинки типа **Ц** је: $26^{10} \cdot \binom{10}{2}$.	1 бод	*За проверавање свих лозинки овога типа је потребно отприлике 117 639 сати (отпр. 13,5 година)*
Њихов однос је $\frac{26^{10} \cdot \binom{10}{2}}{26^8} =$	1 бод	
= 30 420. Толико пута више времена је потребно програму да провери лозинке типа **Ц** него за проверу лозинки типа **Б**.	1 бод	
Укупно:	**4 бода**	

18. b) **други начин**		
Лозинке типа **Ц** су за два карактера дуже од лозинки типа **Б**, и оба додатна карактера се могу ставити на 26 начина,	1 бод	
што значи 26^2 (= 676) пута толико могућности.	1 бод	
Осим тога се на $\binom{10}{2}$ (= 45) начина може изабрати која од десет карактера да буду велика слова.	1 бод	
Тако да је за проверу свих лозинки типа **Ц** потребно $26^2 \cdot \binom{10}{2} = 30\,420$ пута више времена него за је све лозинке типа **Б**.	1 бод	
Укупно:	**4 бода**	

18. c)		
Означавајући са *n* број лозинки које су упоређене, треба решити неједначину $\frac{n(n-1)}{2} < 900$ (где је *n* цео позитиван број).	1 бод	
одатле $n^2 - n - 1800 < 0$.	1 бод	
Корени једначине $n^2 - n - 1800 = 0$ су $n \approx -41{,}9$ és $n \approx 42{,}9$.	1 бод	
Пошто је главни коефицијент израза $n^2 - n - 1800 = 0$ позитиван,	1 бод	*Ови бодови се дају и у случају одговарајуће скице, одн. цртежа.*
решење неједначине у скупу позитивних целих бројева је: $0 < n < 43$.	1 бод	
Програм је упоредио највише 42 лозинке.	1 бод	
Укупно:	**6 бодова**	

Напомена: Ако кандидат даје тачан одговор без образложења (нпр. пробањем), дају му се 2 бода.

18. d)		
$\lg 2^{77\,232\,917} = 77\,232\,917 \cdot \lg 2 \approx$	1 бод	
$\approx 23\,249\,424{,}7$	1 бод	
Дакле, број цифара траженог броја је заиста 23 249 425.	1 бод	
Укупно:	**3 бода**	