Azonosító jel:

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2019. május 7.

# MATEMATIKA NÉMET NYELVEN

# EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

## 2019. május 7. 8:00

Időtartam: 300 perc

| Pótlapok száma | |
|---|---|
| Tisztázati | |
| Piszkozati | |

**EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA**

# Wichtige Hinweise

1. Es steht Ihnen eine Arbeitszeit von 300 Minuten zur Verfügung, nach dem Ablauf der Zeit müssen Sie die Arbeit beenden.
2. Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist beliebig.
3. Im Teil II müssen Sie nur vier der fünf gegebenen Aufgaben lösen. **Schreiben Sie am Ende ihrer Arbeit die Nummer der nicht gewählten Aufgabe in das Kästchen!** Wenn es für die Korrektoren *nicht eindeutig erkennbar ist*, welche Aufgabe Sie nicht wählen wollten, wird die letzte der aufgegebenen Aufgaben nicht bewertet.

4. Zur Lösung der Aufgaben sind Taschenrechner, die für die Speicherung und Darstellung von Texten nicht geeignet sind, und ein beliebiges Tafelwerk zugelassen. Weitere elektronische, gedruckte oder schriftliche Hilfsmittel sind nicht erlaubt!
5. **Beschreiben Sie den Lösungsweg immer ausführlich, denn die meisten für die Aufgabe bestimmten Punkte werden dafür vergeben!**
6. **Achten Sie darauf, dass die wichtigsten Berechnungen anschaulich sind!**
7. Während der Aufgabenlösung kann man **den Gebrauch des Taschenrechners –ohne weitere mathematische Begründung- bei den folgenden Rechnungen akzeptieren:** Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzieren, Wurzelziehen, Berechnen von $n!$, $\binom{n}{k}$, für die Ersetzung der Tabellen im Tafelwerk (sin, cos, tg, log und ihre Umkehrfunktionen), zur Angabe des Näherungswertes von der Zahlen $\pi$ und $e$, zur Bestimmung der Lösungen einer auf Null reduzierten quadratischen Gleichung. Weiterhin darf man den Taschenrechner ohne mathematischen Begründung verwenden, wenn der Durchschnitt und die Streuung berechnet wird, es sei denn der Text der Aufgabe verlangt eindeutig die Nebenrechnungen dazu. **In anderen Fällen gelten die mit Taschenrechner durchgeführten Rechnungen als nicht begründete Schritte, für die keine Punkte verteilt werden können.**
8. Sätze, die Sie in der Schule mit Namen gelernt haben (z. B. Satz von Pythagoras, Höhensatz), müssen nicht formuliert werden. Es reicht, wenn Sie den Namen des Satzes nennen und kurz begründen, warum der Satz hier verwendbar ist. Der Bezug auf weitere Sätze wird nur dann vollständig akzeptiert, wenn Sie den Satz mit allen Bedingungen genau formulieren (ohne Beweis) und seine Anwendung im konkreten Fall begründen.

9. Die Endergebnisse der Aufgaben (die Antwort auf die gestellte Frage), müssen Sie in einem Antwortsatz formulieren!
10. Schreiben sie mit Kugelschreiber oder mit Tinte, die Abbildungen können auch mit Bleistift gezeichnet werden! Außerhalb der Abbildungen werden die mit Bleistift geschriebenen Teile nicht bewertet. Wenn Sie eine Lösung oder einen Teil davon durchstreichen, kann dieses nicht bewertet werden.
11. Bei den einzelnen Aufgaben ist nur eine Lösung zu bewerten. Bei mehreren Lösungsversuchen **markieren Sie bitte eindeutig**, welchen Sie für richtig halten!
12. Bitte, **beschreiben Sie die grauen Kästchen nicht!**

# I.

**1.** Lösen Sie die folgenden Gleichungen in der Menge der reellen Zahlen!

**a)** $2^{2x+2} + 31 \cdot 2^x - 8 = 0$

**b)** $4\sin^3 x - \sin x = 0$

| | | |
|---|---|---|
| **a)** | 6 Punkte | |
| **b)** | 7 Punkte | |
| **I.:** | 13 Punkte | |

**2.** Beim Entwerfen des kostengünstigsten Leitungssystems zwischen mehreren Siedlungen wurde zunächst ein **vollständiger Graph** erstellt. In diesem Graphen wurden alle Siedlungen mit einem Knotenpunkt des Graphen, alle verdrahteten Verbindungen mit je einer Kante des Graphen dargestellt. An jeder Kante des Graphen wurde geschrieben, wie viel der Ausbau der Verbindung kosten würde. Dann wurden die "teuren Kanten" nacheinander gelöscht, sodass der nach dem Löschen verbleibende Graph zusammenhängend bleibt.
Nachdem man zwei Drittel der Kanten des vollständigen Graphen gelöscht hat, erhielt man schließlich einen **Baumgraphen** (der das kostengünstigste Netzwerk darstellt).

**a)** Wie viele Siedlungen waren im Plan?

An der Kleinfeld-Fußballliga im Herbst nahmen aus 10 Siedlungen je eine Mannschaft teil. Jede Mannschaft spielte gegen jede andere Mannschaft ein Spiel. Der Gewinner jedes Spiels bekam 3, der Verlierer 0 Punkte. Bei einem Unentschieden erzielten beide Mannschaften je 1 Punkt. Am Ende der Meisterschaft hatten die 10 Teams insgesamt 130 Punkte.

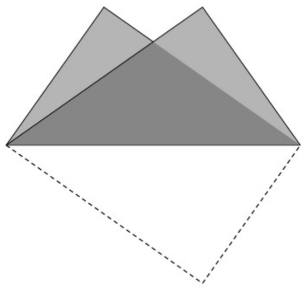
**b)** Wie viele Spiele endeten unentschieden?

| | | |
|---|---|---|
| **a)** | 6 Punkte | |
| **b)** | 5 Punkte | |
| **I.:** | 11 Punkte | |

**3.** Betrachte man alle siebenstelligen natürlichen Zahlen, die alle der Ziffern l, 2, 3, 4, 5, 6, 7 enthalten.

**a)** All diese Zahlen werden auf ein rechteckiges Papierstück von der Größe 0,5 cm × 2 cm aufgeschrieben (auf jedes Papierstück wird eine siebenstellige Zahl geschrieben). Reichen 8 A4-Blätter aus, um die kleinen Rechtecke zu erstellen? (A4-Blatt ist rechteckig und hat eine Größe von 21 cm × 29,7 cm.)

**b)** Die siebenstelligen Zahlen mit der angegebenen Eigenschaft werden in eine wachsende Reihenfolge geordnet. Beweisen Sie, dass an der Stelle 721 die 2 134 567 steht!



Ein rechteckiges Blatt (A4) von 21 cm × 29,7 wurde entlang einer seiner Diagonalen (laut der Abbildung) gefaltet.

**c)** Berechnen Sie, wie groß die Fläche des Stückes ist, das nach dem Einfalten doppelt bedeckt ist!

| | | |
|---|---|---|
| **a)** | 4 Punkte | |
| **b)** | 4 Punkte | |
| **c)** | 5 Punkte | |
| **I.:** | 13 Punkte | |

**4.** Vier Sensoreinheiten ($A$, $B$, $C$, $D$) sind in Küstennähe auf dem horizontalen Meeresboden installiert. Auf dem Bauplan wurde die Position von drei Sensoren in einem kartesischen Koordinatensystem angegeben: $A(0; -12{,}5)$, $B(10; -7{,}5)$, $C(48; 14)$.

**a)** Beweisen Sie, dass die Punkte $A$, $B$, $C$ nicht auf einer Geraden liegen!

Der Abstand von 1 Einheit, die auf den Koordinatenachsen des Bauplans angegeben ist, beträgt in der Wirklichkeit 20 Meter.

**b)** Wie viele Meter kann der tatsächliche Abstand zwischen den Sensoren $A$ und $D$ sein, wenn der Sensor $D$ so installiert ist, dass er sich im gleichen Abstand von $A$ und $B$ befindet und er in einem Abstand von 1000 Metern von $C$ entfernt liegt?

| | | |
|---|---|---|
| **a)** | 4 Punkte | |
| **b)** | 10 Punkte | |
| **I.:** | 14 Punkte | |

# II.

**Von den Aufgaben 5-9. müssen Sie vier beliebig ausgewählte Aufgaben lösen. Die Nummer der nicht gewählten Aufgabe schreiben Sie bitte ins leere Kästchen auf der Seite 2!**

**5.** Mit einem regulären Spielwürfel wird zweimal geworfen. Das Ergebnis des ersten Wurfes wird als das erste Glied einer arithmetischen Folge, das Ergebnis des zweiten Wurfes als die Differenz dieser Folge betrachtet.

**a)** Wie viele der zu erhaltenen Folgen sind diejenigen, bei denen die Summe der ersten 10 Glieder weniger als 100 ist? (Zwei Folgen werden als unterschiedlich betrachtet, wenn ihr erstes Glied oder ihre Differenz unterschiedlich ist.)

Betrachte man alle vierstelligen positiven ganzen Zahlen, in denen keine der Ziffern 0 ist.

**b)** Wie viele Zahlen gibt es unter ihnen, deren vier Ziffern (in irgendeiner Reihenfolge) aufeinanderfolgende vier Glieder einer arithmetischen Folge sind?

Janka würfelte viermal mit einem regulären Spielwürfel. Sie stellte fest: Wenn der fünfte Wurf 3 wäre, wäre der Durchschnitt der fünf Würfe 3. Wenn ihr fünfter Wurf 4 wäre, wäre der Median der fünf Würfe 4. Wenn der fünfte Wurf 5 wäre, wäre der (einzige) Modus der fünf Würfe 5.

**c)** Welche Zahlen konnten Jankas erste vier Würfe sein? (Es wird von der Reihenfolge der Würfe abgesehen.)

| | | |
|---|---|---|
| **a)** | 5 Punkte | |
| **b)** | 5 Punkte | |
| **c)** | 6 Punkte | |
| **I.:** | 16 Punkte | |

**Von den Aufgaben 5-9. müssen Sie vier beliebig ausgewählte Aufgaben lösen. Die Nummer der nicht gewählten Aufgabe schreiben Sie bitte ins leere Kästchen auf der Seite 2!**

**6.** Die Bogenlänge eines Kreissektors mit dem Radius $r$ ist $i$, der Umfang des Kreissektors ist: $2r + i = 10$ cm.

**a)** Der Radius des Kreissektors sei 2 cm! Bestimmen Sie den Mittelpunktswinkel $\alpha$, die Fläche $T$ des Kreissektors, weiterhin den Radius $R$ des Grundkreises des Rotationskegels, dessen Mantel dieser Kreissektor ist!

**b)** Beweisen Sie, dass unter den Kreissektoren mit dem Umfang von 10 cm derjenige die maximale Fläche hat, dessen Mittelpunktswinkel 2 Radiant groß ist.

**c)** Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage richtig oder falsch ist! Begründen Sie Ihre Antwort!
Die Fläche eines Kreissektors mit dem Umfang von 10 cm ist immer kleiner als die Fläche eines Kreissektors mit dem Umfang von 20 cm.

| | | |
|---|---|---|
| **a)** | 5 Punkte | |
| **b)** | 8 Punkte | |
| **c)** | 3 Punkte | |
| **I.:** | 16 Punkte | |

**Von den Aufgaben 5-9. müssen Sie vier beliebig ausgewählte Aufgaben lösen. Die Nummer der nicht gewählten Aufgabe schreiben Sie bitte ins leere Kästchen auf der Seite 2!**

**7.** Es gibt 4 rote und 3 grüne Kugeln in einer Schale. Man legt noch $s$ Stück gelbe Kugeln in die Schachtel. Aus den Kugeln werden zwei **mit Zurücklegen** gezogen.

**a)** Bestimmen Sie den Wert von $s$, wenn 0,09 die Wahrscheinlichkeit ist, dass die beiden gezogenen Kugeln grün sind!

Es gibt 4 rote, 3 grüne und $k$ blaue Kugeln in einer Schale ($k \geq 1$). Aus den Kugeln werden drei **ohne Zurücklegen** gezogen.

**b)** Beweisen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass man drei Kugeln verschiedener Farben zieht, ist: $\dfrac{72k}{(k+7)(k+6)(k+5)}$!

**c)** Bestimmen Sie den Wert von $k$, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass man drei Kugeln unterschiedlicher Farben zieht gleich der Wahrscheinlichkeit ist, dass alle drei gezogenen Kugeln blau sind!

| | | |
|---|---|---|
| **a)** | 4 Punkte | |
| **b)** | 5 Punkte | |
| **c)** | 7 Punkte | |
| **I.:** | 16 Punkte | |

**Von den Aufgaben 5-9. müssen Sie vier beliebig ausgewählte Aufgaben lösen. Die Nummer der nicht gewählten Aufgabe schreiben Sie bitte ins leere Kästchen auf der Seite 2!**

**8.** Die Länge der Wasseroberfläche des Plattensees beträgt ca. 76,5 km, die durchschnittliche Breite ist ca. 7,7 km.

**a)** Berechnen Sie die durchschnittliche Wassertiefe des Plattensees, wenn das geschätzte Wasservolumen im See 2 Milliarden $m^3$ beträgt! Geben Sie Ihre Antwort in Metern auf eine Nachkommastelle gerundet an!

Ádám und Misi möchten den Plattensee an einem Tag mit dem Fahrrad umfahren. Die Länge des Radweges um den See herum beträgt 205 km. Sie fahren um 7 Uhr morgens los. In der Mittagspause fanden sie heraus, dass ihre Durchschnittsgeschwindigkeit bis zur Mittagspause 16 km/h betrug. Sie fahren nach der 60-minütigen Mittagspause weiter. Um das Ziel vor Einbruch der Dunkelheit zu erreichen, wird die Durchschnittsgeschwindigkeit auf der verbleibenden Strecke auf 20 km/h erhöht. Um halb 8 kommen sie also wirklich an ihren Ausgangspunkt zurück.

**b)** Wann haben die Jungs die Mittagspause gehalten?

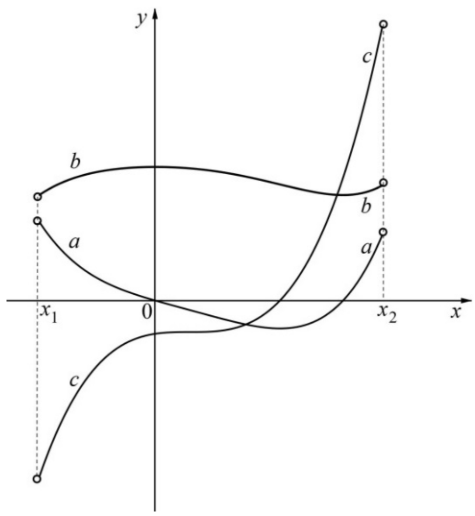
Die Breite des Sees ist zwischen Balatonvilágos und Balatonalmádi am größten, etwa 12,7 km.

**c)** Mindestens wie viele Meter über die Wasseroberfläche sollte die am Balatonvilágos-Hafen platzierte Signalsäule herausragen, damit das Lichtsignal des Sturmwarnungsgerätes oben auf der Säule für die Badegäste am Strand von Balatonalmádi unter Berücksichtigung der Erdkrümmung zu sehen ist? (Betrachten Sie die Erde als Kugel mit einem Radius von 6370 Kilometern.)

| | | |
|---|---|---|
| **a)** | 3 Punkte | |
| **b)** | 6 Punkte | |
| **c)** | 7 Punkte | |
| **I.:** | 16 Punkte | |

**Von den Aufgaben 5-9. müssen Sie vier beliebig ausgewählte Aufgaben lösen. Die Nummer der nicht gewählten Aufgabe schreiben Sie bitte ins leere Kästchen auf der Seite 2!**

**9.** In der Abbildung sind die Graphen der im offenen Intervall $]x_1 ; x_2[$ definierten Funktion $f$, der ersten Ableitungsfunktion von $f$ und der zweiten Ableitungsfunktion von $f$ zu sehen. Die Graphen der drei Funktionen werden in beliebiger Reihenfolge mit den Buchstaben $a$, $b$, $c$ bezeichnet.
Laut der Aussage **A** der folgenden Tabelle bezeichnet in der Abbildung $a$ die Funktion $f$, $b$ die erste Ableitungsfunktion von $f$ ($f'$) und $c$ die zweite Ableitungsfunktion von $f$ ($f''$).
Auf ähnliche Weise wurden alle anderen möglichen Zuordnungen aufgelistet.




**a)** Bestimmen Sie den logischen Wert der Aussagen **B**, **C**, **D**, **E**, **F**! Sie müssen Ihre Antworten **hier** nicht begründen. (Die Aussage **A** ist *falsch*, wir haben sie bereits gegeben.)

| | $f$ | $f'$ | $f''$ | Die Aussage ist richtig/falsch |
|---|---|---|---|---|
| **A** | $a$ | $b$ | $c$ | falsch |
| **B** | $a$ | $c$ | $b$ | |
| **C** | $b$ | $a$ | $c$ | |
| **D** | $b$ | $c$ | $a$ | |
| **E** | $c$ | $a$ | $b$ | |
| **F** | $c$ | $b$ | $a$ | |

**b)** Erklären Sie anhand der Beziehungen zwischen der Funktion und ihren Ableitungsfunktionen, warum die Aussage **A** falsch ist.

Gegeben sind im kartesischen Koordinatensystem die Punkte $A$, $B$, $C$, $D$: $A(0; 4)$, $B(0; 1)$, $C(p; 1)$, $D(p; 4)$, wo $p > 0$ ist. Die Kurve mit der Gleichung $y = \frac{x^2}{4}$ halbiert die Fläche des Rechtecks $ABCD$.

**c)** Beweisen Sie, dass $p > 4$ ist, dann berechnen Sie den Wert von $p$!

| | | |
|---|---|---|
| **a)** | 3 Punkte | |
| **b)** | 3 Punkte | |
| **c)** | 10 Punkte | |
| **I.:** | 16 Punkte | |

| | Nummer der Aufgabe | Punktzahl maximale | Punktzahl erreichte | Punktzahl maximale | Punktzahl erreichte |
|---|---|---|---|---|---|
| I. Teil | 1. | 13 | | **51** | |
| | 2. | 11 | | | |
| | 3. | 13 | | | |
| | 4. | 14 | | | |
| II. Teil | | 16 | | **64** | |
| | | 16 | | | |
| | | 16 | | | |
| | | 16 | | | |
| | | ← die nicht gewählte Aufgabe | | | |
| **Die Punktzahl des schriftlichen Teiles** | | | | **115** | |

Datum

Korrektor

| | pontszáma **egész számra** kerekítve elért | pontszáma **egész számra** kerekítve programba beírt |
|---|---|---|
| I. rész | | |
| II. rész | | |

dátum

dátum

javító tanár

jegyző