ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2016. május 3.

MATEMATIKA
SZERB NYELVEN

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI
ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI
ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK
MINISZTÉRIUMA

Важне информације

Формални захтеви:

1. Молимо Вас да задатке исправљате **хемијском оловком другачије боје** од оне коју користи кандидат, а исправке да буду **читљиве**.
2. У сивим правоугаоницима који се налазе поред задатака у првом је максималан број бодова за тај задатак, а у други **правоугаоник** наставник који исправља уписује постигнут **број бодова**.
3. У случају **потпуно исправног решења (без грешке)**, молимо Вас да поред истицања максималног броја бодова, лулицом означите да сте приметили дату мисаону целину и вредновали је као добру.
4. У случају решења са недостатком/грешком, молимо Вас да поред **означавања грешке** на задатак напишете и појединачни **делимични број бодова**. Прихвата се да означавате делимичне бодове које кандидату нису додељени, уколико се тиме исправљање задатка може лакше пратити. У решењу не сме остати такав део за који после исправке није јасно да ли је тачан, погрешан или сувишан.
5. Приликом исправљања **користите следеће ознаке.**
   - тачан корак: *лулица*
   - принципијелна грешка: *двоструко подвлачење*
   - рачунска грешка или друга грешка која није принципијелна: *само (једноструко) подвлачење*
   - добро извршен тачан корак са нетачним полазним подацима: *испрекидана или превучена лулица*
   - образложење или набрајање са недостатком, или други недостатак: *ознака за недостатак*
   - неразумљиви део: *знак питања и/или таласаста линија*
6. Осим скица, делове који су написани **графитном оловком** немојте вредновати.

Садржајни захтеви:

1. Код појединих задатака смо дали бодовање за више начина решавања. Уколико се нађе тачно **решење различито од наведених**, потражите у упутству делове који се подударају и на основу тога извршите бодовање.
2. Бодови у упутству се могу даље **разложити, уколико у упутству није другачије написано**. Међутим, број бодова који се додељује може бити само цео број.
3. Ако у решењу има **рачунске грешке**, нетачности, бодови се не дају само на онај део где је ученик начинио грешку. Ако са погрешним делимичним резултатом даље ради тачним поступком, а проблем за решавање се у суштини не мења, додељују му се даљи делимични бодови.
4. У случају **принципијелне грешке** у оквиру једне мисаоне целине (у упутству означено двоструком линијом) ни за формално тачне математичке поступке се бодови не додељују. Уколико ученик наставља са радом и као почетни податак узима лоше решење које је добио због принципијелне грешке, а даље тачно рачуна у следећој мисаоној целини или делу питања, онда за тај део добија максималан број бодова, уколико се проблем за решавање у суштини није променио.

5. Ако се у упутству за решавање у загради налази нека **напомена** или нека **мерна јединица**, и у случају њиховог недостатка се решење сматра да има потпуну вредност.
6. Од више покушаја решења за један задатак **вреднује се она варијанта коју је кандидат означио**. Приликом исправљања задатка једносмислено означите коју варијанту сте вредновали, и коју нисте вредновали.
7. За решења се **наградни бодови** (бодови који прелазе прописани максимални број за дати задатак или његов део) **не могу доделити**.
8. Укупни додељен број бодова за један задатак или део задатка **не може бити негативан**.
9. За делимичне прорачуне, делимичне кораке који су са грешкама али их кандидат при решавању задатка није искористио **не одузимају се бодови**.
10. Коришћење **скице** као доказа (на пример очитавање података мерењем) се не може прихватити.
11. Код одређивања **вероватноће** (уколико текстом задатка није другачије одређено) може се прихватити и тачно решење дато у процентима.
12. Уколико се у тексту неког задатка не захтева заокруживање, може се прихватити и делимично и коначно решење добијено **рационалним и тачним заокруживањем**, које одступа од оног у упутству.
13. **Од означених задатака у испитном делу II се од 5 задатка вреднују само решења за 4 задатка.** Кандидат је уписао у квадрат – вероватно – редни број задатка чије вредновање неће ући у укупан број бодова. Према томе, евентуално дато решење за означени задатак ни не треба исправљати. Уколико кандидат није означио за који задатак кандидат не жели да се бодује, а ни из радње се избор не може једносмислено утврдити, онда ће задатак који се не бодује аутоматски бити онај који је последњи по истакнутом редоследу.

Пажња! Део под називом **Важне информације** који се налази на почетку упутства се битно променио. Молимо Вас да га пре почетка исправљања задатака пажљиво прочитате!

I

1. a) **први начин**		
Обе стране једначине ћемо подићи на квадрат: $\frac{4x^2+44x+121}{9}=x^2+6x+9$.	2 бода	
$x^2+2x-8=0$	2 бода	
$x = 2$ vagy $x = –4$.	1 бод	
После замењивања корена у једначину, добијамо да су обадва решења дате једначине.	1 бод	
Укупно:	**6 бодова**	

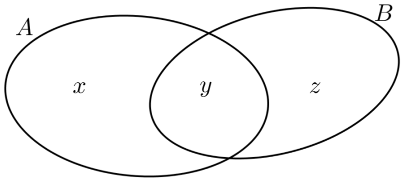
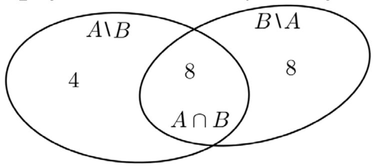
1. a) **други начин**		
$\frac{2x+11}{3}=\lvert x+3\rvert$	1 бод	
Ако је $x \geq -3$, онда је једначина: $\frac{2x+11}{3}=x+3$,	1 бод	
одакле је $x = 2$ (што стварно није мање од –3).	1 бод	
Ако је $x < –3$, онда је једначина: $\frac{2x+11}{3}=-x-3$,	1 бод	
одакле $x = –4$ (што је стварно мање од –3).	1 бод	
Контрола: позивање на еквиваленцију или замењивањем.	1 бод	
Укупно:	**6 бодова**	

1. b)		
$x > 3$	1 бод	*Овај бод се даје и онда ако кандидат замењивањ. контролише тачност решења.*
(користећи идентичност и дефиницију логаритма:) $\log_2\frac{(x+1)(x-3)}{x+9}=$	1 бод	
$=\log_2 2$	1 бод	*Овај бод се даје и онда ако се ова мисао види из следећег корака.*
(Због узајамне једносмислености логаритма:) $\frac{(x+1)(x-3)}{x+9}=2$	1 бод	
Сређивањем: $x^2-4x-21=0$.	1 бод	
Корени једначине другог степена су 7 и –3.	1 бод	
Контрола: –3 није, а 7 јесте решење полазне једначине (замењивањем или позивањем на област дефинисаности и еквивалентно претварање).	1 бод	
Укупно:	**7 бодова**	

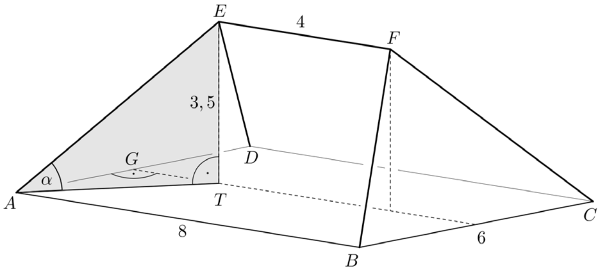
2. a) **први начин**		
5 ученика има петицу из физике,	1 бод	
и 7 ученика има петицу из математике.	1 бод	
5 + 7 = 12, али само 10 ученика имају барем из једног предмета петицу, зато	1 бод	
из оба предмета 2 ученика имају петицу.	1 бод	
Укупно:	**4 бода**	

2. a) **други начин**		
(ако из оба предмета x ученика има петицу) онда их само из физике има $5 - x$,	1 бод	
само из математике $7 - x$ ученика има петицу.	1 бод	
$5 - x + x + 7 - x = 10$	1 бод	
$x = 2$, из оба предмета 2 ученика имају петицу.	1 бод	
Укупно:	**4 бода**	

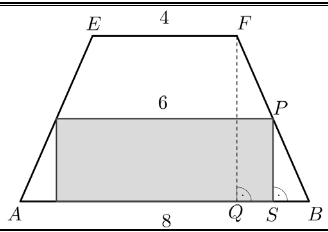
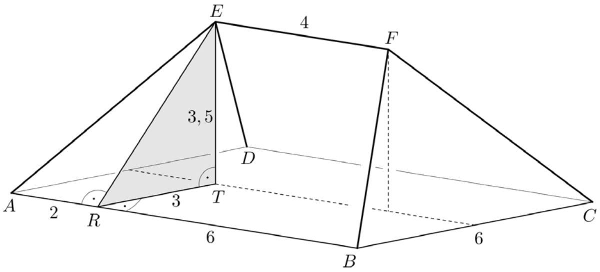
Напомена: Ако кандидат уз помоћ тачно нацртане и испуњене скице скупова добије тачан резултат, даје му се целокупни број бодова.

2. b)		
Нацртајмо Венов дијаграм!  (x, y, z по реду означавају број елемената скупова $A \setminus B$, $A \cap B$, односно $B \setminus A$).	1 бод	
Први члан аритметичког низа је x, други је y, а трећи је $x + y$, зато је	1 бод	*Овај бод се даје и онда ако се ова мисао види тек из решења.*
разлика аритметичког низа $(x + y) - y = x$.	1 бод	
Дакле, број елемената скупа A је $3x$, скупа B (четврти члан низа) је $4x$.	1 бод	
Збир елемената скупова A и B је 28, зато је $3x + 4x = 28$.	1 бод	
Први члан аритметичког низа, а и разлика низа је 4.	1 бод	
Контрола: Број елемената скупа B је 16 (зато је $z = 8$).  $\|A \setminus B\| = 4$, $\| A \cap B \| = 8$, $\| A \| = 12$, $\| B \| = 16$. Ова четири броја су заиста прва четири узастопна члана једног аритметичког низа.	1 бод	
Укупно:	**7 бодова**	

3. a)

 (Користимо ознаке са цртежа!) У ATG правоуглом троуглу $GT = 2$ м и $AG = 3$ м,	1 бод	
па је (примењујући Питагорину теорему) $AT = \sqrt{13}$ (≈ 3,61) (м).	1 бод	$GE = \sqrt{3{,}5^2 + 2^2} =$ $= \sqrt{16{,}25}$ (≈ 4,03) (м)
(Примењујући Питагорину теорему у правоуглом троуглу ATE) $AE = \sqrt{AT^2 + ET^2} =$	1 бод	$AE = \sqrt{GE^2 + GA^2}$
$= \sqrt{25{,}25} \approx 5$ (м) је дужина носеће греде.	1 бод	
Угао који заклапа носећа греда са хоризонталом је угао EAT на цртежу означен са α,	1 бод	*Овај бод се даје и онда ако се ова мисао види тек из решења.*
за који је $\sin\alpha = \frac{ET}{AE}$ (≈ 0,6965),	1 бод	
одакле је $\alpha \approx 44°$.	1 бод	
Укупно:	**7 бодова**	

3. b)

Дужина једне странице правоугаоног соларног елмента максимално може бити једнака дужини средње линије трапеза,	1 бод	*Овај бод се даје и онда ако се ова мисао види тек из решења.*
значи 6 метара.	1 бод	
Дужина друге странице правоугаоника је константа, јер је то половина висине трапеза (на цртежу то је PS, средња линија троугла FQB).	1 бод	
 (Користимо ознаке са цртежа!) Висину трапеза израчунавамо из правоуглог троугла ETR: $ER = \sqrt{ET^2 + TR^2} = \sqrt{3{,}5^2 + 3^2} = \sqrt{21{,}25}$ (≈ 4,61) (м).	1 бод	*(Користећи ознаке са горње скице:)* $PS = \sqrt{PB^2 - SB^2} =$ $= \sqrt{6{,}3125 - 1} =$ $= \sqrt{5{,}3125}$ (≈ 2,30) (m)

Површина највећег соларног елемента: $\frac{6\cdot\sqrt{21{,}25}}{2}$ ($\approx$ 13,83) (м^2).	1 бод	*Површина највећег соларног елемента:* $6\cdot\sqrt{5{,}3125}$ ($\approx$ 13,83) (m^2)
Може се поставити соларни елемент чија је површина највише 13,8 m^2 .	1 бод	*Овај бод се не даје ако кандидат не заокружи или лоше заокружује.*
Укупно:	**6 бодова**	

4. a)		
Приход од улазница у случају да је цена 1500 Фт и има 1000 гледалаца је 1 500 000 Фт.	1 бод	
Ако n пута повисимо цену улазнице за 5 форинти ($n\in \mathbf{N}^+$), онда ће (према моделу) број гледалаца бити 1000 – 10n особа.	1 бод	
Модификовани приход (1500 + 5n)(1000 – 10n) =	1 бод	
= 1 500 000 – 10 000n – 50n^2 форинти,	1 бод	
што је мање од 1 500 000 форинти,	1 бод*	
јер одузимамо чланове позитивне вредности.	1 бод*	
Укупно:	**6 бодова**	

*Два бода обележена са * кандидат добија и за следећи ток мисли:*

Ако је b „функција прихода“ дефинисана у скупу позитивних реалних бројева $b(n)=-50n^2-10\ 000n+1\ 500\ 000$, онда је $b'(n)=-100n-10\ 000$.	1 бод	
Изводна функција је у целокупној области дефинисаности негативна, дакле b функција је строго монотоно опадајућа (дакле, таква је и функција сужена на скуп позитивних целих).	1 бод	

4. b)		
Ако m пута смањимо цену улазнице за 5 форинти, онда ће број гледалаца бити 1000 + 10m особа ($m\in \mathbf{Z}$).	1 бод	
Модификовани приход (1500 – 5m)(1000 + 10m) =	1 бод	
= 1 500 000 + 10 000m – 50m^2 (Фт).	1 бод	
Преобраћено у потпуне квадрате: –50(m – 100)^2 + 2 000 000, дакле	2 бода*	
m = 100 је место максимума.	1 бод*	
Тада је цена улазнице (1500 – 100 $\cdot$ 5 =) 1000 Фт.	1 бод	
Највећи приход (1000 $\cdot$ 2000 =) 2 000 000 Фт.	1 бод	
Укупно:	**8 бодова**	

*3 бода обележена са * кандидат добија и за један од следећих тока мисли:*

Ако је *f* „функција прихода“ дефинисана у скупу реалних бројева $f(m) = -50m^2 + 10\ 000m + 1\ 500\ 000$, онда је $f'(m) = -100m + 10\ 000$.	1 бод	
Ако је $f'(m) = 0$, онда је $m = 100$.	1 бод	
Пошто је $f''(m) = -100 < 0$, зато је 100 заиста место максимума функције *f* (тако је и за функцију сужену на скуп целих бројева).	1 бод	*Овај бод се додељује и онда ако кандидат тачно образлаже променом предзнака првог извода.*

Ако је *f* „функција прихода“ дефинисана у скупу реалних бројева $f(m) = -50m^2 + 10\ 000m + 1\ 500\ 000$, онда су места нула функције *f* 300 и –100.	1 бод	
Функција *f* има максимум, на месту аритметичке средине нула функције.	1 бод	
Дакле, место максимума функције *f* је 100. То је уједно и место максимума прихода.	1 бод	

II

5. а) први начин		
На првој производној линији производе 80 кошуља са грешком, а на другој линији 170 кошуља са грешком.	1 бод	
(Кошуљу са грешком можемо бирати од 250 комада, дакле) број укупних случајева је 250.	1 бод	*Ова 2 бода се дају и онда ако се ове мисли види тек из решења.*
(Од кошуљу са грешком призведених на другој линији можемо бирати од 170 комада, дакле) број повољних случајева је 170.	1 бод	
Тако је тражена вероватноћа $\frac{170}{250} =$	1 бод	
$= 0{,}68$.	1 бод	*Прихвата се и тачно решење дато у процентима.*
Укупно:	**5 бодова**	

5. a) други начин		
На првој производној линији производе 80, а на другој линији 170 кошуља са грешком.	1 бод	
Означите са A онај догађај када су изабрану кошуљу произвели на другој линији, а са B онај догађај када је изабрана кошуља са грешком. Тиме је тражена вероватноћа: $P(A\|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$.	1 бод	*Овај бод се даје и онда ако се ова мисао види тек из решења.*
$P(AB)=\frac{170}{9000}=\frac{17}{900}$	1 бод	
$P(B)=\frac{250}{9000}=\frac{25}{900}$	1 бод	
$P(A\|B)=\frac{\frac{17}{900}}{\frac{25}{900}}=\frac{17}{25}=0{,}68$	1 бод	*Прихвата се и тачно решење дато у процентима.*
Укупно:	**5 бодова**	

5. b)		
Нека x буде цена кошуље у форинтама пре попуста, и нека је $q=1-\frac{p}{100}$.	1 бод	
(Да су се два попуста догодила у обрнутом редоследу, онда би цена кошуље после двоструког попуста била xq – 500 форинта, дакле) $(xq-500)+50=(x-500)\cdot q$.	2 бода	
(Ако је у оба случаја снижење p%, онда је нова цена xq^2 форинта, дакле) $(x-500)\cdot q+90=xq^2$.	2 бода	
Из прве једначине q = 0,9,	1 бод	
односно p = 10.	1 бод	
(Замењивањем вредности q у другу једначину) $(x-500)\cdot 0{,}9+90=x\cdot 0{,}81$.	1 бод	
x = 4000	1 бод	
Првобитна цена кошуље је 4000 Фт, а вредност p је 10.	1 бод	
Контрола: 4000 – 500 = 3500, смањено за 10% је 3150; 4000 смањено за 10% је 3600, 3600 – 500 = 3100; 4000 смањено за 10% је 3600, опет смањено за 10% је 3240. 3150 = 3100 + 50 и 3150 = 3240 – 90, дакле, добијена решења су тачна.	1 бод	*Овај бод се даје само онда ако кандидат замењивањем у текст контролише тачност решења.*
Укупно:	**11 бодова**	

6. a)		
Из једначине $\cos x+2=\sin x+2$: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ ($k\in \mathbf{Z}$).	1 бод	*Ако кандидат очита без израчунавања, и не контролише крајње тачке интервала замењивањем, онда се овај бод не даје.*
Из горњег-наведеног решења произилази да је прва координата заједничке тачке две криве $-\frac{3\pi}{4}$, односно $\frac{\pi}{4}$.	1 бод	
$T=\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\big((\cos x+2)-(\sin x+2)\big)\,dx=$	2 бода	$T=\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x+2)dx-$ $-\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+2)dx=$
$=[\sin x+\cos x]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=$	2 бода	$=[\sin x+2x]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}-$ $-[-\cos x+2x]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$
$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$	1 бод	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)-$ $-\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)\right]=$ $=\left(\sqrt{2}+2\pi\right)-\left(-\sqrt{2}+2\pi\right)=$
$=2\sqrt{2}$ ($\approx 2{,}83$)	1 бод	
Укупно:	**8 бодова**	

6. b) први начин		
$a_1=-\frac{6}{5}$, $a_2=-\frac{17}{2}$, $a_3=28$.	1 бод	
Пошто је $a_2<a_1<a_3$, зато низ није монотон.	1 бод	
Ако је $n\ge 4$, онда је $a_n>0$ (јер су и бројилац и именилац дефинисаног разломка позитивни), дакле низ је од доле ограничен (на пример, $-\frac{17}{2}$ је једна доња граница).	1 бод	

(Преображавањем према правилу додељивања низа:) $a_n = \dfrac{11-\frac{5}{n}}{3-\frac{8}{n}}$.	1 бод	$a_n = \dfrac{11n-5}{3n-8} = \dfrac{\frac{11}{3}\cdot(3n-8)+\frac{73}{3}}{3n-8} =$
Ако је $n \geq 4$, онда је бројилац мањи од 11, а именилац барем 1,	1 бод	$= \dfrac{11}{3} + \dfrac{73}{9n-24}$
онда је $a_n < \dfrac{11}{1} = 11$.	1 бод	*Ако је* $n \geq 4$*, онда је то мање од 10* ($a_n \leq \dfrac{11}{3} + \dfrac{73}{12} = \dfrac{39}{4} < 10$).
($a_2 < a_3 = 28$ и $a_1 < a_3 = 28$ је такође тачно, дакле) низ је ограничен и од горе, јер је једна горња граница 28.	1 бод	
Дакле, испитивани низ (је ограничен и од горе и од доле, па је заиста) је ограничен.	1 бод	
Укупно:	**8 бодова**	

6. b) други начин		
$a_1 = -\dfrac{6}{5}$, $a_2 = -\dfrac{17}{2}$, $a_3 = 28$.	1 бод	
Пошто је $a_2 < a_1 < a_3$, зато низ није монотон.	1 бод	
Напишимо разломак a_n који дефинише низ $\{a_n\}$ у облику $a_n = \dfrac{11-\frac{5}{n}}{3-\frac{8}{n}}$.	1 бод	$a_n = \dfrac{11n-5}{3n-8} = \dfrac{\frac{11}{3}\cdot(3n-8)+\frac{73}{3}}{3n-8} =$
Низ $\{b_n\}$ дефинисан формулом у бројиоцу је конвергентан (гранична вредност 11), и	1 бод	$= \dfrac{11}{3} + \dfrac{73}{9n-24}$
низ $\{c_n\}$ дефинисан формулом у имениоцу је исто конвергентан (гранична вредност 3).	1 бод	*Ако је* $d_n = \dfrac{73}{9n-24}$*, онда је* $\{d_n\}$ *конверген-тан (гранична вредност је 0),*
Зато је количник низова $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$, односно и низ $\{a_n\}$ конвергентан (гранична вредност $\dfrac{11}{3}$).	1 бод	*зато је и* $\{a_n\}$ *конвергентан (гранична вредност* $\dfrac{11}{3}$*).*
Сваки конвергентан низ је ограничен,	1 бод	
зато је и низ $\{a_n\}$ ограничен.	1 бод	
Укупно:	**8 бодова**	

7. a) **први начин**		
Број троцифрених који не садрже нулу 9^3 (= 729).	1 бод	
Међу њима има 8^3 (= 512) таквих бројева, који не садрже јединицу.	1 бод	
Има $9^3 - 8^3$ (= 217) таквих троцифрених бројева који задовољавају условима.	1 бод	
Одговарајући број двоцифрених је $9^2 - 8^2$ (= 17),	1 бод	
и један једноцифрени број, то је број.	1 бод	
Одговарајући број позитивних целих је збир ових, дакле, $9^3 - 8^3 + 9^2 - 8^2 + 1$ (= 235).	1 бод	
Укупно:	**6 бодова**	

7. a) **други начин**		
Број троцифрених који не садрже нулу а садрже једну јединицу је $3 \cdot 8 \cdot 8$ (= 192) комада.	1 бод	
Две јединице садржи $3 \cdot 8$ (= 24) комада,	1 бод	
и 111 је једини троцифрени број који има три јединице.	1 бод	
и 111 је једини троцифрени број који има три јединице $2 \cdot 8$ (= 16), две јединице садржи њих 11, то је укупно 17 одговарајућих двоцифрених бројева.	1 бод	
Од једноцифрених задовољава само број 1.	1 бод	
Одговарајући број позитивних целих је збир ових, дакле 235.	1 бод	
Укупно:	**6 бодова**	

7. b)		
Ако (једини) број *m* заменимо са *m* + 10, онда (се број података не мења, и) се збир података повећава за 10.	1 бод	$22n + 10 = 24n$
Просек се увећао за 2, зато је број података $\left(\frac{10}{2} = \right)5$.	1 бод	$n = 5$
Укупно:	**2 бода**	

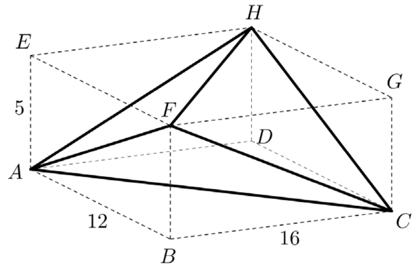
7. c)		
Збир 5 података у оригиналној групи података ($5 \cdot 22 =$) 110.	1 бод	
Пошто је модус 32, зато је фреквенција барем 2.	1 бод	
Постављајући пет података у редослед који није опадајући, број који стоји испред m медијане је $m - 4$ (јер ако m умањимо за 5, онда у новој групи података то долази на место m-а).	2 бода*	*$m - 4 = 10$ није могуће (нпр. зато што тада збир пет података не може бити 110).*
Најмањи податак је 10, па је $10 + (m - 4) + m + 32 + 32 = 110$.	1 бод*	
Одатле је $m = 20$.	1 бод*	
Дакле, подаци су следећи: 10, 16, 20, 32, 32.	1 бод	
Контрола: просек пет бројева је 22; ако 20 заменимо са 30, просек ће бити 24; ако уместо 20 напишемо 15, медијана ће бити 16.	1 бод	
Укупно:	**8 бодова**	

*4 бода обележена са * кандидат добија и за следећи ток мисли:*

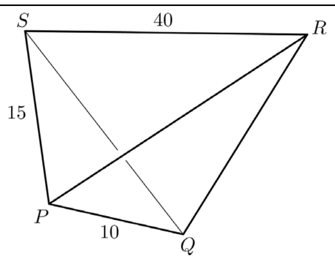
Међу пет података се налази (и најмањи) 10 и барем два пута 32.	1 бод	
Збир два податка које не знамо: $110 - (10 + 32 + 32) = 36$.	1 бод	
Ова два податка су цели позитивни бројеви, па су могуће следеће двочлане могућности: $10 + 26 = 11 + 25 = ... = 17 + 19$.	1 бод	
Међу њима само 16 и 20 задовољавају условима задатка.	1 бод	

8. a)		
Запремину тетраедра *ACFH* добијамо тако што ћемо од запремине квадра одузети запремину четири подударне тростране „угаоне пирамиде“ које се налазе код темена *B, D, G* и *E*.	1 бод	*Овај бод се даје и онда ако се ова мисао види тек из решења.*
Запремина једне „угаоне пирамиде“ је $\frac{5 \cdot 12 \cdot 16}{6} = 160$ (цм^3).	1 бод	
Запремина тетраедра *ACFH* је $5 \cdot 12 \cdot 16 - 4 \cdot \frac{5 \cdot 12 \cdot 16}{6} =$	1 бод	
$= 320$ цм^3.	1 бод	
Укупно:	**4 бода**	

Напомена: За израчунавање површине једне странице тетраедра ACFH само по себи се не додељује бод.

8. b)		
 Тачан цртеж (тачно означавање тетраедра).	1 бод	*Овај бод се даје и онда ако кандидат без цртежа ради тачно.*
Подударне дијагонале квадра су исте дужине, зато је $AC = FH$, $AF = CH$ и $AH = CF$.	1 бод	
Дакле, странице тетраедра су такви троуглови, чије ивице су у паровима једнаке дужине, зато су међусобно подударни.	1 бод	
Укупно:	**3 бода**	

8. c)		
Да би стекли увид да су троуглови који образују странице оштроугли, довољно је доказати да је највећи угао једног троугла оштар угао.	1 бод	*Овај бод се даје и онда ако кандидат тачно израчуна сва три угла. (83,4°; 56,4°; 40,2°)*
На пример, у троуглу AFH (Питагорина теорема) $AF = 13 < AH = \sqrt{281} < FH = 20$,	1 бод	
тако да је косинус угла φ који се налази наспрам странице FH (косинусна теорема): $\cos\varphi = \frac{169+281-400}{2\cdot 13\cdot\sqrt{281}}$ (≈ 0,1147).	2 бода	
Пошто је позитиван број, угао φ је заиста оштар.	1 бод	
Укупно:	**5 бодова**	

8. d)		
У PRS троуглу $PS = 15$ цм и $SR = 40$ цм, зато (због неједнакости троугла између 20, 25, односно 30 цм) PR може бити само $PR = 30$ цм.	1 бод	
У PQS троуглу $PS + PQ = 25$, зато QS може бити само $QS = 20$ цм.	1 бод	
Тако QR може бити само $QR = 20$ цм, и онда постоји и RSQ троугао (јер 20 + 25 > 40).	1 бод	
Дакле, постоји само један одговарајући тетраедар.	1 бод	
Укупно:	**4 бода**	

9. а) први начин		
На поље 4 можемо стићи у један, два, три или четири корака.	1 бод	*Овај бод се даје и онда ако се ова мисао види тек из решења.*
Једним кораком можемо стићи на поље 4 ако бацимо 4, вероватноћа тога је $\frac{1}{6}$.	1 бод	
У два корака можемо стићи на поље 4 следећим бацањима: 3-1, 2-2 или 1-3.	1 бод	
Вероватноћа тога је укупно $\left(3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\right)\frac{3}{36}$.	1 бод	
У три корака можемо стићи на поље 4 следећим бацањима: 1-1-2, 1-2-1 или 2-1-1.	1 бод	
Вероватноћа тога је укупно $\left(3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\right)\frac{3}{216}$.	1 бод	
У четири корака можемо стићи на поље 4 само ако четири пута бацимо 1, та вероватноћа је $\left(\frac{1}{6}\right)^4=\frac{1}{1296}$.	1 бод	
Вероватноћа да барем једном станемо на поље 4 је збир претходних,	1 бод	*Овај бод се даје и онда ако се ова мисао види тек из решења.*
дакле, $\frac{343}{1296}\approx 0{,}265$.	1 бод	*Прихвата се и тачан одговор у процентима.*
Укупно:	**9 бодова**	

9. а) други начин		
Прво бацање је могло бити 4, 3, 2 или 1.	1 бод	*Овај бод се даје и онда ако се ова мисао види тек из решења.*
Ако нам је прво бацање било 4, одмах смо стали на поље 4. Вероватноћа тога је $\frac{1}{6}$.	1 бод	
Ако нам је прво бацање било 3, на поље 4 стижемо само ако у следећем бацању бацимо 1. Вероватноћа тога је $\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$.	1 бод	
Ако нам је прво бацање било 2, на поље 4 стижемо следећом 2, или два пута 1.	1 бод	
Вероватноћа тога је $\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{36}+\frac{1}{216}$.	1 бод	

Ако нам је прво бацање било 1, на поље 4 стижемо следећим бацањима: 3, 2-1 или 1-1-1.	1 бод	
Вероватноћа тога је $\left(\frac{1}{6}\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3+\left(\frac{1}{6}\right)^4=\frac{1}{36}+\frac{2}{216}+\frac{1}{1296}$.	1 бод	
Вероватноћа да барем једном станемо на поље 4 је збир претходних,	1 бод	*Овај бод се даје и онда ако се ова мисао види тек из решења.*
дакле, $\frac{343}{1296}\approx 0{,}265$.	1 бод	*Прихвата се и тачан одговор у процентима.*
Укупно:	**9 бодова**	

9. а) трећи начин		
Израчунајмо вероватноћу комплементног догађаја. Ако нисмо стали на поље 4, онда смо га у 1., 2., 3, или 4. кораку прескочили.	1 бод	*Овај бод се даје и онда ако се ова мисао види тек из решења.*
Ако смо у првом кораку прескочили, значи да смо бацили 5 или 6. Вероватноћа тога је $\frac{2}{6}$.	1 бод	
Ако смо у другом кораку прескочили, прва два бацања су могла бити: 1-4, 1-5, 1-6, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6, 3-2, 3-3, 3-4, 3-5, 3-6. Вероватноћа тога је $\frac{12}{36}$.	2 бода	*Два бацања груписана по збиру:* 1-4, 2-3, 3-2; 1-5, 2-4, 3-3; 1-6, 2-5, 3-4; 2-6, 3-5; 3-6.
Ако смо у трећем кораку прескочили, у случају да су прва два бацања 2-1 или 1-2, треће бацање може бити на 5 начина (бацимо барем двојку), у случају 1-1 треће може бити на 4 начина (бацимо барем 3). Вероватноћа тога је $\frac{14}{216}$.	2 бода	2-1-2, 1-2-2, 1-1-3; 2-1-3, 1-2-3, 1-1-4; 2-1-4, 1-2-4, 1-1-5; 2-1-5, 1-2-5, 1-1-6; 2-1-6, 1-2-6.
Ако смо у четвртом кораку прескочили поље 4, онда су прва три бацања била 1-1-1, а четврто може бити на 5 начина (бацимо барем двојку). Вероватноћа тога је $\frac{5}{1296}$.	1 бод	
Вероватноћу да барем једном станемо на поље 4 ћемо добити тако што ћемо од 1 одузети збир претходних вероватноћа.	1 бод	*Овај бод се даје и онда ако се ова мисао види тек из решења.*
Дакле, та вероватноћа је $1-\left(\frac{2\cdot 216+12\cdot 36+14\cdot 6+5}{1296}\right)=\frac{343}{1296}\approx 0{,}265$.	1 бод	*Прихвата се и тачан одговор у процентима.*
Укупно:	**9 бодова**	

9. b) **први начин**		
Могућности ћемо груписати тако што ћемо посматрати колико пута је Андрија бацио 4 приликом прва три бацања.	1 бод	*Овај бод се даје и онда ако се ова мисао види тек из решења.*
Три пута је бацио 4: једна могућност.	1 бод	
Два пута је бацио 4: то није могуће, јер и треће бацање би требало да буде 4.	1 бод	
Једанпут је бацио 4: прво или треће бацање може бити 4.	1 бод	
Збир друга два бацања је такође 4 (1-3, 3-1 или 2-2); то су 3 могућности у оба случаја. То је укупно 6 могућности.	1 бод	
Није бацио 4; онда су три бацања у неком редоследу била 1-1-2; то су 3 могућности.	1 бод	
Андријина серија бацања која се састоји из три бацања могла се остварити на 10 начина.	1 бод	
Укупно:	**7 бодова**	

9. b) **други начин**		
Пре четвртог бацања, Андрија је могао да стане на поље 4 први, други или трећи пут.	1 бод	*Овај бод се даје и онда ако се ова мисао види тек из решења.*
Ако први пут стоји на пољу 4, серија бацања је била 1-1-2, 1-2-1 или 2-1-1. То су 3 могућности.	1 бод	
Ако други пут стоји на пољу 4, онда први пут или је првим или другим кораком тамо доспео.	1 бод	
Ако је први пут у првом кораку доспео на поље 4, онда је прво бацање било 4, а друго је било 3-1, 1-3 или 2-2. То су 3 могућности.	1 бод	
Ако је први пут у другом кораку доспео на поље 4, онда су прва два бацања била 3-1, 1-3 или 2-2, а треће је било 4. То су 3 могућности.	1 бод	
Ако трећи пут стоји на пољу 4, онда су оба претходна бацања била 4. То је 1 могућност.	1 бод	
Дакле, Андријина серија бацања која се састоји из три бацања могла се остварити на 10 начина.	1 бод	
Укупно:	**7 бодова**	

9. b) **трећи начин**		
Андријино прво бацање је могло 4, 3, 2 или 1.	1 бод	*Овај бод се даје и онда ако се ова мисао види тек из решења.*
Ако је прво бацање било 4, онда су могуће серије бацања (следећа бацања сређена по величини) 4-4-4, 4-3-1, 4-2-2, 4-1-3. То су 4 могућности.	2 бода	
Ако је прво бацање било 3, онда је могућа серија бацања могла бити само 3-1-4. То је 1 могућност.	1 бод	
Ако је прво бацање било 2, онда је могућа серија бацања 2-2-4, 2-1-1. То су 2 могућности.	1 бод	
Ако је прво бацање било 1, онда су могуће серије бацања 1-3-4, 1-2-1, 1-1-2. То су 3 могућности.	1 бод	
Дакле, Андријина серија бацања која се састоји из три бацања могла се остварити на 10 начина.	1 бод	
Укупно:	**7 бодова**	

Напомена:
I) Ако кандидат <u>без образложења, али у логичном редоследу (препознавајућем систему)</u>, без недостатака и без грешке набрајањем напише 10 могућих серија бацања, за то му се даје 6 бодова.

II) Ако кандидат <u>без образложења и без логике којом се може идентификовати (без система)</u>, али без недостатака и без грешке напише 10 могућих серија бацања, за то му се може дати највише 4 бода (јер се из описа не види да нема више могућности).

Ако кандидат <u>набрајањем без образложења</u> напише могуће серије бацања, али направи грешку (изостави једну серију бацања, погрешно или двапут напише серију бацања), бодови му се дају по следећој табели.

број грешака	*број бодова у I случају*	*број бодова у II случају*
1	5	3
2	4	2
3	3	1
4	2	0
5	1	0
6 или више	0	0