ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2016. május 3.

MATEMATIKA SPANYOL NYELVEN

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Información importante

Cuestiones formales para la corrección del examen:

1. El profesor tiene que corregir el examen con palabras legibles y con un **bolígrafo de diferente color** al utilizado por el alumno.
2. En los recuadros de puntuación grises, el primero indica la máxima puntuación que se puede dar y el **recuadro** de al lado recoge los **puntos** que ha dado el profesor.
3. **Si no hay errores en la resolución, no** es suficiente escribir los puntos máximos en el recuadro correspondiente sino que hay que indicar con el signo de correcto que se ha visto esa parte de la resolución y es correcta.
4. Si hay errores o faltan pasos, indique, por favor, los errores y **los puntos correspondientes a cada parte**. Si es más fácil seguir la corrección indicando los puntos perdidos, también es aceptable. No quedarán partes en la resolución de las que no se pueda decir si son correctas, falsas o innecesarias.
5. En la corrección **aplique los signos siguientes**:
   - paso correcto: *signo correcto (pipa)*
   - error de aplicación teórica: *linea doble*
   - error de cálculo o un error pero no de aplicación teórica: *una línea*
   - paso matemáticamente correcto pero con los datos incorrectos: *notación correcta intermitente o tachada*
   - explicación o enumeración incompleta: *anotación de falta (signo de raíz cuadrada)*
   - si no se puede entender algo: *signos de interrogación o línea ondulada*
6. No se puede evaluar las partes escritos **con lápiz** excepto los dibujos.

Cuestiones de contenido:

1. En algunos ejercicios, les hemos ofrecido la puntuación correspondiente a varias resoluciones. Si usted encuentra **otra resolución,** busque, por favor, las partes equivalentes de las resoluciones que propone la guía y reparta los puntos según dichas partes.
2. **Se pueden dividir aún más los puntos de lo que la guía recomienda excepto si la guía lo ordena de otro modo**. Pero, en cualquier caso, los puntos que se den siempre serán enteros.
3. Si en una parte de la resolución, el estudiante comete **un error de cálculo** o de precisión, no recibirá únicamente los puntos correspondientes a la parte donde ha cometido el error. Si al arrastrar este error, el resto de los pasos realizados son correctos y no cambia el sentido del problema, entonces se puntuarán el resto de los pasos.

4. En caso de **un error de aplicación teórica**, dentro de un razonamiento en la resolución (los razonamientos distintos aparecen separados con una línea doble en la guía), no se pueden dar puntos ni siquiera por los pasos matemáticamente correctos hechos tras cometer el error. Pero si en el siguiente razonamiento, se sigue trabajando bien, a pesar del resultado incorrecto causado por dicho error, se darán los puntos máximos para las siguientes partes de la resolución del problema, si no ha cambiado el sentido del mismo.
5. Si en la guía, **algún comentario** o **una unidad de medida** está entre paréntesis, la solución será totalmente correcta aunque no se escriba.
6. Si se escriben varios intentos correctos para resolver un ejercicio, **sólo se puntuará uno de ellos, el que el alumno examinado haya indicado como válido**.
7. **No se pueden dar puntos extra** (que excedan los puntos máximos que se pueden dar para el ejercicio o una parte de él).
8. La suma de los puntos obtenidos por un ejercicio o por parte de él **no puede ser negativa.**
9. **No se restan puntos** si aparecen errores en algún paso o en partes de la resolución que el alumno no utiliza después para resolver el ejercicio.
10. No se puede aceptar **los dibujos** para justificar los pasos (por ejemplo: obtener datos con una medición).
11. El resultado de un ejercicio de **probabilidad** se puede aceptar en tanto por ciento, excepto si el enunciado del ejercicio lo prohíbe.
12. Si el enunciado del ejercicio no manda nada sobre el redondeo del resultado, entonces se puede aceptar todo lo que **es razonable y correcto,** a pesar de que la guía no lo ofrezca.
13. **De los cinco ejercicios propuestos en la parte II del examen solo se pueden puntuar cuatro.** Probablemente el estudiante habrá indicado el número del ejercicio eliminado, el que no se puntuará, en el recuadro correspondiente. Si el alumno hubiera resuelto este ejercicio no habría que corregirlo. Si no queda claro cuál es el ejercicio que el alumno examinado no desea que se le corrija, entonces automáticamente no se corregirá el último ejercicio, según el orden en que aparecen.

¡Atención! La primera parte de la guía: **„Informaciones importantes”** han modificado en muchas cosas , por eso antes de comenzar la corrección estudie atentamente.

I.

1. a) primer método

Elevar al cuadrado los lados de la ecuación: $\frac{4x^2+44x+121}{9}=x^2+6x+9$.	2 puntos	
$x^2+2x-8=0$	2 puntos	
$x = 2$ vagy $x = –4$.	1 punto	
Al sustituir las raíces podemos ver que ambas cumplen la ecuación	1 punto	
Total:	**6 puntos**	

1. a) második megoldás

$\frac{2x+11}{3}=\lvert x+3\rvert$	1 punto	
Si $x\geq -3$, entonces la ecuación: $\frac{2x+11}{3}=x+3$,	1 punto	
de donde $x = 2$ (esto realmente no es menor que –3).	1 punto	
Si $x < –3$, entonces la ecuación: $\frac{2x+11}{3}=-x-3$,	1 punto	
de donde $x = –4$ (esto realmente es menor que –3).	1 punto	
Comprobación: con sustitución o con referencia a la equivalencia.	1 punto	
Total:	**6 puntos**	

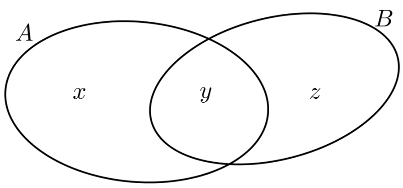
1. b)

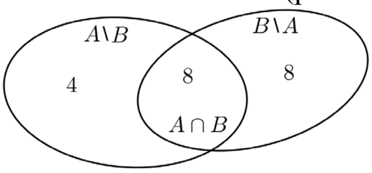
$x > 3$	1 punto	*También se dará este punto si el examinante comprueba la solución mediante sustitución*
(Utilizando la definición y las propiedades del logaritmo:) $\log_2\frac{(x+1)(x-3)}{x+9}=$	1 punto	
$=\log_2 2$	1 punto	*También se dará este punto si este paso se deduce del siguiente*
(Como la función logarítmica es estrictamente creciente:) $\frac{(x+1)(x-3)}{x+9}=2$	1 punto	
Ordenando: $x^2-4x-21=0$.	1 punto	
las raíces de la ecuación de segundo grado: 7 y –3.	1 punto	
Comprobación: el –3 no, pero el 7 sí es raíz de la ecuación (sustituyendo o haciendo referencia al dominio y a las transformaciones equivalentes).	1 punto	
Total:	**7 puntos**	

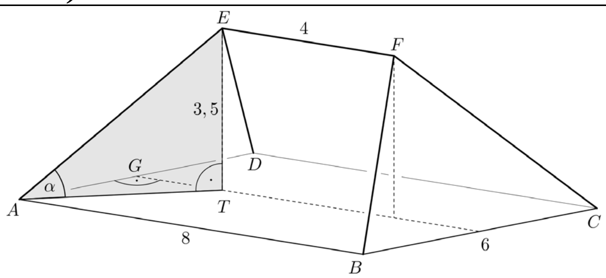
2. a) primer método		
5 alumnos tienen sobresaliente en física,	1 punto	
y 7 alumnos tienen sobresaliente en matemáticas.	1 punto	
5 + 7 = 12, pero sólo 10 alumnos tienen sobresaliente en al menos una asignatura. Por eso	1 punto	
2 alumnos tienen sobresaliente en ambas asignaturas.	1 punto	
Total:	**4 puntos**	

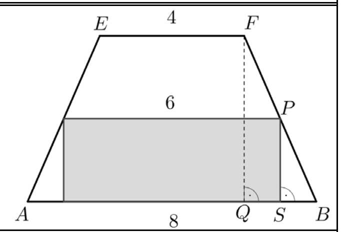
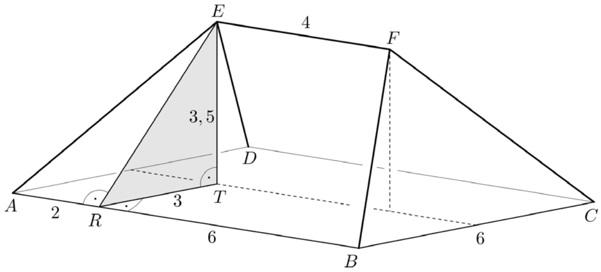
2. a) segundo método		
(Si x alumnos tienen sobresaliente en ambas asignaturas, entonces) sólo en física serán $5 - x$,	1 punto	
sólo en matemáticas $7 - x$ alumnos tienen sobresaliente	1 punto	
$5 - x + x + 7 - x = 10$	1 punto	
$x = 2$, es decir 2 alumnos tienen sobresaliente en ambas asignaturas.	1 punto	
Total:	**4 puntos**	

Nota: Si el examinante dibujó y rellenó correctamente un diagrama de conjuntos , puede obtener todos los puntos.

2. b)		
Preparamos diagrama de Venn.  (*x, y, z en este orden indican los cardinales de los conjuntos $A \setminus B$, $A \cap B$ y $B \setminus A$*).	1 punto	
x es el primer término de la progresión aritmética; y es el segundo y $(x + y)$ es el tercero; por eso	1 punto	*También se dará este punto si estas explicaciones se deducen de la resolución del ejercicio.*
la diferencia de la progresión aritmética es $(x + y) - y = x$.	1 punto	
El cardinal de A es $3x$ y el de B (que es el cuarto término de la progresión) $4x$.	1 punto	
la suma de los cardinales de A y B es 28, por eso $3x + 4x = 28$.	1 punto	
Así el primer término y la diferencia de la progresión es 4.	1 punto	

Comprobación: el cardinal de B es 16 (por eso $z = 8$).  $\lvert A \setminus B\rvert = 4$, $\lvert A \cap B \rvert = 8$, $\lvert A \rvert = 12$, $\lvert B \rvert = 16$. Estos cuatro números son los términos consecutivos de una progresión aritmética.	1 punto	
Total:	**7 puntos**	

3. a)		
 (Utilizamos la notación del dibujo.) En el triángulo rectángulo *ATG, GT* = 2 m y *AG* = 3 m,	1 punto	
así (aplicando el teorema de Pitágoras) $AT = \sqrt{13}$ (≈ 3,61) (m).	1 punto	$GE = \sqrt{3{,}5^2 + 2^2} =$ $= \sqrt{16{,}25}$ (≈ 4,03) (m)
(aplicando el teorema de Pitagoras al triángulo *ATE*) $AE = \sqrt{AT^2 + ET^2} =$	1 punto	$AE = \sqrt{GE^2 + GA^2}$
$= \sqrt{25{,}25} \approx 5$ (m) es la longitud de la viga inclinada.	1 punto	
El ángulo formado por la viga inclinada y el plano horizontal es el ángulo *EAT*, indicado por α,	1 punto	*También se dará este punto si estas explicaciones se deducen de la resolución del ejercicio.*
por lo que $\sin\alpha = \dfrac{ET}{AE}$ (≈ 0,6965),	1 punto	
de donde $\alpha \approx 44^\circ$.	1 punto	
Total:	**7 puntos**	

3. b)		
La longitud máxima de uno de los lados de la célula solar es igual a la base media del trapecio,	1 punto	*También se dará este punto si estas explicaciones se deducen de la resolución del ejercicio.*
es decir 6 metros.	1 punto	
La longitud del otro lado del rectángulo es constante, porque es la mitad de la altura del trapecio (en el dibujo *PS* es la base media del triángulo rectángulo *FQB*).	1 punto	
 (Utilizamos la notación del dibujo.) La altura del trapecio podemos calcularla a partir del triángulo rectángulo *ETR*: $ER=\sqrt{ET^2+TR^2}=\sqrt{3{,}5^2+3^2}=\sqrt{21{,}25}$ (≈ 4,61) (m).	1 punto	*(Utilizando la notación del dibujo:)* $PS=\sqrt{PB^2-SB^2}=$ $=\sqrt{6{,}3125-1}=$ $=\sqrt{5{,}3125}$ (≈ 2,30) (m)
El área de la mayor célula solar: $\frac{6\cdot\sqrt{21{,}25}}{2}$ (≈ 13,83) (m²).	1 punto	El área de la mayor célula solar*:* $6\cdot\sqrt{5{,}3125}$ (≈ 13,83) (m²)
Podemos situar una célula solar de un área como máximo de 13,8 m².	1 punto	*No se puede dar este punto si no se redondea o se hace mal.*
Total:	**6 puntos**	

4. a)		
El ingreso total si el precio es de 1500 Ft y hay 1000 espectadores es de 1 500 000 Ft.	1 punto	
Si aumentamos el precio 5 Ft *n* veces ($n\in\mathbf{N}^+$), entonces (según el modelo) el número de espectadores será 1000 – 10*n*.	1 punto	
El ingreso así obtenido: (1500 + 5*n*)(1000 – 10*n*) =	1 punto	
= 1 500 000 – 10 000*n* – 50n^2 Ft,	1 punto	
que es menor de 1 500 000 Ft,	1 punto*	
porque le estamos restando números positivos.	1 punto*	
Total:	**6 puntos**	

** Si el examinante razona del siguiente modo también puede obtener los dos puntos:*

Si definimos "la función de ingreso" $b(n) = -50n^2 - 10\,000n + 1\,500\,000$, donde b es un número real positivo, entonces $b'(n) = -100n - 10\,000$.	1 punto	
La función derivada en todo el dominio es negativa, por eso, la función *b(n)* es estrictamente decreciente (así la función reducida al dominio de números enteros positivos también lo es).	1 punto	

4. b)		
Si bajamos el precio de las entradas 5 Ft m veces ($m \in \mathbf{Z}$), entonces el número de espectadores será $1000 + 10m$.	1 punto	
El ingreso obtenido así: $(1500 - 5m)(1000 + 10m) =$	1 punto	
$= 1\,500\,000 + 10\,000m - 50m^2$ (Ft).	1 punto	
Completamos cuadrados: $-50(m - 100)^2 + 2\,000\,000$, así	2 puntos*	
$m = 100$ es el valor de m que maximiza los ingresos.	1 punto*	
En este caso, el precio de la entrada será: $(1500 - 100 \cdot 5 =)$ 1000 Ft.	1 punto	
Y el ingreso máximo: $(1000 \cdot 2000 =)$ 2 000 000 Ft.	1 punto	
Total:	**8 puntos**	

** Si el examinante razona de uno de estos modos también puede obtener los tres puntos:*

Si f es una función definida en el conjunto de los números reales, denominada "función de ingreso", $f(m) = -50m^2 + 10\,000m + 1\,500\,000$ entonces $f'(m) = -100m + 10\,000$.	1 punto	
Si $f'(m) = 0$, entonces $m = 100$.	1 punto	
Como $f''(m) = -100 < 0$, el valor 100 es el máximo de la función, por eso, también lo es en la función reducida al dominio de números enteros positivos.	1 punto	*Se puede dar este punto si el examinante razona adecuamente basándose en el cambio de signo de la derivada.*

Si f es una función definida en el conjunto de los números reales, denominada "función de ingreso", $f(m) = -50m^2 + 10\,000m + 1\,500\,000$ entonces las raíces de f son 300 y -100.	1 punto	
como f tiene máximo, el lugar del máximo será la media aritmética de las raíces	1 punto	
así el lugar del máximo de la función es 100. Este valor es para el que se obtiene el máximo ingreso.	1 punto	

II.

5. a) **primer método**		
En la primera cadena de máquinas se fabrican 80 camisas defectuosas y en la segunda, 170.	1 punto	
(La camisa defectuosa la podemos elegir de entre 250 camisas, por eso) los casos totales 250.	1 punto	*También se darán estos 2 puntos si estas explicaciones se deducen de la resolución del ejercicio.*
(La camisa defectuosa fabricada en la segunda cadena la podemos elegir de entre 170 camisas, es decir) los casos favorables son 170	1 punto	
Así la probabilidad es $\frac{170}{250} =$	1 punto	
= 0,68.	1 punto	*Podemos aceptar el resultado en %.*
Total:	**5 puntos**	

5. a) **segundo método**		
En la primera cadena de máquinas se fabrican 80 camisas defectuosas y en la segunda, 170.	1 punto	
Sean los sucesos A = „la camisa fue fabricada en la segunda cadena” y B = „la camisa es defectuosa”, así la probabilidad:: $P(A\|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.	1 punto	*También se dará este punto si estas explicaciones se deducen de la resolución del ejercicio.*
$P(A \cap B) = \frac{170}{9000} = \frac{17}{900}$	1 punto	
$P(B) = \frac{250}{9000} = \frac{25}{900}$	1 punto	
$P(A\|B) = \frac{\frac{17}{900}}{\frac{25}{900}} = \frac{17}{25} = 0{,}68$	1 punto	*Se puede aceptar el resultado en %.*
Total:	**5 puntos**	

5. b)		
Sea x el precio original de la camisa en Ft y sea $q=1-\frac{p}{100}$.	1 punto	
(El precio de la camisa en el segundo caso será xq – 500 Ft, entonces la ecuación) $(xq-500)+50=(x-500)\cdot q$.	2 puntos	
(Si la disminución fue del $p\%$ en ambos casos, entonces el nuevo precio será xq^2) $(x-500)\cdot q+90=xq^2$.	2 puntos	
De la primera ecuación q = 0,9,	1 punto	
por lo que p = 10.	1 punto	
(Sustituyendo el valor q en la segunda ecuación) $(x-500)\cdot 0{,}9+90=x\cdot 0{,}81$.	1 punto	
x = 4000	1 punto	
El precio original de la camisa es 4000 Ft y el valor de p es 10.	1 punto	
Comprobación: 4000 – 500 = 3500, disminuyendo un 10% es 3150; 4000 disminuyendo un 10% es 3600, 3600 – 500 = 3100; 4000 disminuyendo un 10% es 3600, y otra vez un 10% resulta 3240. 3150 = 3100 + 50 y 3150 = 3240 – 90, así los resultados son correctos.	1 punto	*Sólo se puede dar este punto si el examinante comprueba que el resultado es adecuado al enunciado del ejercicio.*
Total:	**11 puntos**	

6. a)		
De la ecuación $\cos x+2=\sin x+2$, la solución es: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$).	1 punto	*Si no se calculan los extremos del intervalo, sino que se deducen directamente de la gráfica, no se otorgará este punto.*
De la solución anterior, las primeras cordenadas de los puntos comunes en la gráfica dada son: $-\frac{3\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{4}$.	1 punto	
$T=\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\big((\cos x+2)-(\sin x+2)\big)\,dx=$	2 puntos	$T=\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x+2)dx-$ $-\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+2)dx=$

$=[\sin x+\cos x]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=$	2 puntos	$=[\sin x+2x]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}-$ $-[-\cos x+2x]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$
$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$	1 punto	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)-$ $-\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)\right]$ $=\left(\sqrt{2}+2\pi\right)-\left(-\sqrt{2}+2\pi\right)=$
$=2\sqrt{2}$ $(\approx 2{,}83)$	1 punto	
Total:	**8 puntos**	

6. b) **primer método**		
$a_1=-\frac{6}{5}$, $a_2=-\frac{17}{2}$, $a_3=28$.	1 punto	
Como $a_2<a_1<a_3$, por eso la sucesión no es monótona.	1 punto	
Si $n\ge 4$, entonces $a_n>0$ (porque el numerador y denominador de la fracción son positivos), así la sucesión está acotada inferiormente (por ejemplo $-\frac{17}{2}$ es una cota inferior).	1 punto	
(Modificando la regla de formación de la sucesión:) $a_n=\dfrac{11-\frac{5}{n}}{3-\frac{8}{n}}$.	1 punto	$a_n=\frac{11n-5}{3n-8}=$ $=\dfrac{\frac{11}{3}\cdot(3n-8)+\frac{73}{3}}{3n-8}=$
Si $n\ge 4$, entonces el numerador es menor que 11 y el denominador es al menos 1,	1 punto	$=\frac{11}{3}+\frac{73}{9n-24}$
entonces $a_n<\frac{11}{1}=11$.	1 punto	*Si $n\ge 4$, entonces esto es menor que 10* ($a_n\le\frac{11}{3}+\frac{73}{12}=\frac{39}{4}<10$).
(se cumple que $a_2<a_3=28$ y $a_1<a_3=28$) así la sucesión es acotada superiormente, porque 28 es una cota superior.	1 punto	
Como la sucesión es acotada inferior y superiormente, es acotada.	1 punto	
Total:	**8 puntos**	

6. b) **segundo método**		
$a_1 = -\frac{6}{5}$, $a_2 = -\frac{17}{2}$, $a_3 = 28$.	1 punto	
Como $a_2 < a_1 < a_3$, por eso la sucesión no es monótona.	1 punto	
En la sucesión $\{a_n\}$ modificamos la forma de la fracción: $a_n = \frac{11-\frac{5}{n}}{3-\frac{8}{n}}$.	1 punto	$a_n = \frac{11n-5}{3n-8} =$ $= \frac{\frac{11}{3}\cdot(3n-8)+\frac{73}{3}}{3n-8} =$
Definimos $\{b_n\}$ como la sucesión del numerador. Es convergente (su límite es 11).	1 punto	$= \frac{11}{3} + \frac{73}{9n-24}$
Definimos $\{c_n\}$ como la sucesión del denominador. Es convergente (su límite es 3).	1 punto	*Si* $d_n = \frac{73}{9n-24}$, *entonces* $\{d_n\}$ *convergente (su límite es 0),*
Por eso, el cociente de $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ también es convergente (su límite es $\frac{11}{3}$).	1 punto	*por eso* $\{a_n\}$ *es convergente (su límite es* $\frac{11}{3}$*).*
Como todas las sucesiones convergentes son acotadas,	1 punto	
por eso, la sucesión $\{a_n\}$ es acotada.	1 punto	
Total:	**8 puntos**	

7. a) **primer método**		
La cantidad de números de tres cifras que no incluyen al 0 es 9^3 (= 729).	1 punto	
Entre ellos, hay 8^3 (= 512) que no contienen la cifra 1.	1 punto	
Es decir, hay $9^3 - 8^3$ (= 217) números que cumplen las condiciones indicadas.	1 punto	
La cantidad de números de dos cifras: $9^2 - 8^2$ (= 17),	1 punto	
y hay un número de una cifra: el 1.	1 punto	
La suma de todos los casos anteriores es: $9^3 - 8^3 + 9^2 - 8^2 + 1$ (= 235).	1 punto	
Total:	**6 puntos**	

7. a) **segundo método**		
La cantidad de números de tres cifras sin el 0 y con un solo 1 es: $3 \cdot 8 \cdot 8 (= 192)$.	1 punto	
La de los que contienen dos unos $3 \cdot 8 (= 24)$,	1 punto	
y hay uno de tres cifras, 111, que contiene tres unos	1 punto	
Entre los números de dos cifras que no contienen el 0 hay $2 \cdot 8 (= 16)$ que contienen un 1, hay 11 que contienen dos unos; por eso, cumplen las condiciones un total de 17.	1 punto	
Entre los números de una cifra solo hay uno: el 1.	1 punto	
La suma de todas estas cantidades es 235.	1 punto	
Total:	**6 puntos**	

7. b)		
Si cambiamos el elemento *m* (el único) por *(m+10)*, entonces (el número de datos no cambia, pero) la suma de los datos aumenta 10 unidades.	1 punto	$22n + 10 = 24n$
La media aumenta 2 unidades, por lo que el número de datos será $\left(\frac{10}{2} = \right) 5$.	1 punto	$n = 5$
Total:	**2 puntos**	

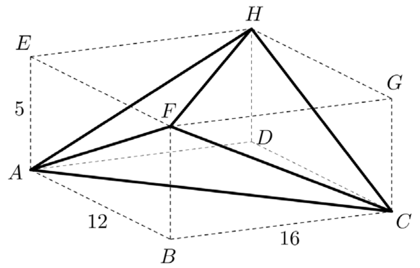
7. c)		
La suma de los 5 datos originales es $(5 \cdot 22 =)$ 110.	1 punto	
Como la moda es 32, entonces la frecuencia del elemento 32 será al menos 2.	1 punto	
Si ordenamos los 5 datos en orden no decreciente, el número que está justo antes del m es el $m - 4$ (pues se convierte en la nueva mediana al cambiar *m* por $m - 5$).	2 puntos*	*$m - 4 = 10$ no puede ser (porque la suma de los 5 datos no sería igual a 110).*
El menor de los datos es 10, así $10 + (m - 4) + m + 32 + 32 = 110$.	1 punto*	
De esto $m = 20$.	1 punto*	
Los datos son los siguientes: 10, 16, 20, 32, 32.	1 punto	
Comprobación: la media de los cinco números es 22; si el 20 lo cambiamos por 30, entonces la media será 24; y si en vez de 20 escribimos 15, la mediana será 16.	1 punto	
Total:	**8 puntos**	

**Los 4 puntos, señalados con* también los puede recibir el examinante si utiliza este método:*

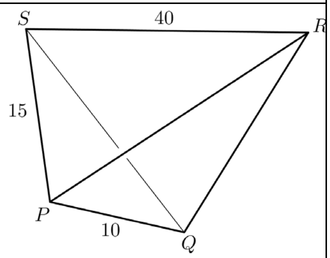
Entre los datos está el 10 (y el es el menor) y al menos dos veces el 32.	1 punto	
Así la suma de los datos desconocidos: $110 - (10 + 32 + 32) = 36$.	1 punto	
Sabiendo que los datos son números positivos y enteros las sumas sólo pueden ser: $10 + 26 = 11 + 25 = ... = 17 + 19$.	1 punto	
De todas ellas, sólo cumplen las condiciones exigidas el 16 y el 20.	1 punto	

8. a)		
Podemos obtener el volumen del tetraedro *ACFH, si* del volumen del ortoedro *ABCDEFGH* restamos los volumenes de los tetraedros congruentes, los que se sitúan en los vértices *B, D, G, E*.	1 punto	*También se dará este punto si estas explicaciones se deducen de la resolución del ejercicio.*
El volumen de un tetraedro es: $\frac{5\cdot12\cdot16}{6}=160$ (cm^3).	1 punto	
El volumen del tetraedro *ACFH* será: $5\cdot12\cdot16-4\cdot\frac{5\cdot12\cdot16}{6}=$	1 punto	
= 320 cm^3.	1 punto	
Total:	**4 puntos**	

Si el examinante sólo calcula el área de un lado del tetraedro no recibe ningún punto.

8. b)		
 El dibujo correcto (dibujar exactamente el tetraedro).	1 punto	*Se puede obtener este punto sin el dibujo, pero realizando correctamente el ejercicio.*
Las diagonales de los rectángulos congruentes son iguales, por eso *AC* = *FH*, *AF* = *CH* y *AH* = *CF*.	1 punto	
Los lados del tetraedro son triángulos cuyos lados son iguales dos en dos, por eso, estos triángulos son congruentes.	1 punto	
Total:	**3 puntos**	

8. c)		
Para justificar que los triángulos de los lados son acutángulos es suficiente demostrar que el mayor de los ángulos es agudo.	1 punto	*Se puede dar este punto si se calculan todos los ángulos del triángulo. (83,4°; 56,4°; 40,2°)*
por ejemplo en el triángulo *AFH* (según el teorema de Pitágoras) $AF = 13 < AH = \sqrt{281} < FH = 20$,	1 punto	
Así el coseno del ángulo φ, el opuesto al lado *FH* es (despejando del teorma del coseno): $\cos\varphi = \frac{169+281-400}{2\cdot 13\cdot\sqrt{281}}$ (≈ 0,1147).	2 puntos	
Como este número es positivo, φ es un ángulo agudo.	1 punto	
Total:	**5 puntos**	

8. d)		
En el triángulo *PRS*, *PS* = 15 cm y *SR* = 40 cm, así (aplicando la inecuación del triángulo para los números 20, 25 y 30) sólo puede ser PR = 30 cm.	1 punto	
En el triángulo *PQS*, *PS* + *PQ* = 25, por lo que se concluye que *QS* = 20 cm.	1 punto	
Así *QR* = 25 cm es la única posibilidad. Entonces el triángulo *RSQ* existe (pues 20 + 25 > 40).	1 punto	
Es decir, existe un único tetraedro.	1 punto	
Total:	**4 puntos**	

9. a) **primer método**		
Podemos llegar a la casilla 4 en 1, 2, 3 o 4 pasos.	1 punto	*También se dará este punto si estas explicaciones se deducen de la resolución del ejercicio.*
En un paso, podemos llegar si obtenemos un 4. La probabilidad de este suceso es $\frac{1}{6}$.	1 punto	
Hay diferentes maneras de llegar en 2 pasos: 3-1, 2-2 y 1-3.	1 punto	
La probabilidad de esto es $\left(3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\right)\frac{3}{36}$.	1 punto	
En tres pasos podemos llegar con las siguientes tiradas: 1-1-2, 1-2-1 y 2-1-1.	1 punto	
La probabilidad de esto es $\left(3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\right)\frac{3}{216}$.	1 punto	
En cuatro pasos sólo podemos llegar con cuatro unos. La probabilidad sería $\left(\frac{1}{6}\right)^4=\frac{1}{1296}$.	1 punto	
La probabilidad de que al menos una vez lleguemos a casilla 4 es la suma de las anteriores:	1 punto	*También se dará este punto si estas explicaciones se deducen de la resolución del ejercicio.*
$\frac{343}{1296}\approx 0{,}265$.	1 punto	*Se puede aceptar el resultado en %.*
Total:	**9 puntos**	

9. a) **segundo método**		
El primer lanzamiento pudo ser 4, 3, 2 o 1.	1 punto	*También se dará este punto si estas explicaciones se deducen de la resolución del ejercicio.*
Si el primer tiro fue 4, ya estamos en el casilla 4, su probabilidad es $\frac{1}{6}$.	1 punto	
Si el primer tiro fue 3, tenemos que sacar un 1, la probabilidad es $\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$.	1 punto	
Si el primer tiro fue 2, ya tenemos más posibilidades un 2 y dos unos.	1 punto	
La probabilidad de esto: $\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{36}+\frac{1}{216}$.	1 punto	

Si el primer tiro fue un 1, entonces con los siguientes tiros podemos llegar a la casilla 4: 3, 2-1, 1-2 y 1-1-1.	1 punto	
La probabilidad de esto: $\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{36} + \frac{2}{216} + \frac{1}{1296}$.	1 punto	
La probabilidad de que al menos una vez lleguemos a la casilla 4 es la suma de las anteriores:	1 punto	*También se dará este punto si estas explicaciones se deducen de la resolución del ejercicio.*
$\frac{343}{1296} \approx 0{,}265$.	1 punto	*El resultado puede expresarse en %.*
Total:	**9 puntos**	

9. a) tercer método		
Calculamos la probabilidad del suceso contrario. Si no caemos en la casilla 4 es porque en el primero, segundo, tercero o cuarto lanzamiento, la saltamos.	1 punto	*También se dará este punto si estas explicaciones se deducen de la resolución del ejercicio.*
Si la saltamos en el primer paso, entonces obtuvimos un 5 o un 6. La probabilidad de esto es: $\frac{2}{6}$.	1 punto	
Si lo saltamos en el segundo paso entonces pudimos sacar: 1-4, 1-5, 1-6, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6, 3-2, 3-3, 3-4, 3-5, 3-6. La probabilidad de esto es $\frac{12}{36}$.	2 puntos	*Agrupado por la suma de las tiradas:* 1-4, 2-3, 3-2; 1-5, 2-4, 3-3; 1-6, 2-5, 3-4; 2-6, 3-5; 3-6.
Si la saltamos en el tercer paso, hay también diferentes posibilidades: si estamos en la casilla tres en el segundo lanzamiento entonces hemos lanzado: 2-1 o 1-2 y en la tercera tirada podemos sacar un número mayor que 1; si estamos en la casilla 2, la única opción fue 1-1 y debemos sacar más de 2. La probabilidad de esto es $\frac{14}{216}$.	2 puntos	2-1-2, 1-2-2, 1-1-3; 2-1-3, 1-2-3, 1-1-4; 2-1-4, 1-2-4, 1-1-5; 2-1-5, 1-2-5, 1-1-6; 2-1-6, 1-2-6.
Si saltamos en el cuarto paso la casilla 4, entonces los primeros tres tiros fueron 1-1-1 y el cuarto puede cualquiera menos el 1 (5 opciones). La probabilidad de esto es $\frac{5}{1296}$.	1 punto	
La probabilidad de que al menos una vez lleguemos a la casilla 4 la obtenemos si restamos de uno la suma de las probabilidades anteriores.	1 punto	*También se dará este punto si estas explicaciones se deducen de la resolución del ejercicio.*

La probabilidad de esto es: $1-\left(\frac{2\cdot 216+12\cdot 36+14\cdot 6+5}{1296}\right)=\frac{343}{1296}\approx 0{,}265.$	1 punto	*El resultado puede expresarse en %.*
Total:	**9 puntos**	

9. b) primer método		
Agrupamos las posibilidades según las veces que András obtuvo el 4 en el dado en las tres primeras tiradas.	1 punto	*También se dará este punto si estas explicaciones se deducen de la resolución del ejercicio.*
Tres veces 4: 1 posibilidad.	1 punto	
Dos veces 4: no se puede porque o se ha pasado la casilla 4 o se debería sacar otra vez el 4.	1 punto	
Una vez 4: en este caso, se habría obtenido en la primera o la tercera tirada.	1 punto	
La suma de las otras dos tiradas también tiene que ser 4 (1-3, 3-1 o 2-2); son tres posibilidades que combinadas con el 4 dan un total de 6 posibilidades.	1 punto	
No lanzó 4: en este caso, los tiros posibles en cualquier orden son 1-1-2, por tanto, hay tres posibilidades.	1 punto	
En total, hay 10 posibilidades diferentes para las tres primeras tiradas de András.	1 punto	
Total:	**7 puntos**	

9. b) segundo método		
Antes del cuarto tiro, András puede haber caído por primera vez, segunda o tercera en la casilla 4.	1 punto	*También se dará este punto si estas explicaciones se deducen de la resolución del ejercicio.*
Si cayó por primera vez, las opciones son 1-1-2, 1-2-1 y 2-1-1. Es decir, 3 posibilidades.	1 punto	
Si cayó por segunda vez, entonces llegó por primera vez en uno o dos pasos.	1 punto	
Si llegó en un paso, entonces su primer lanzamiento fue un 4. Los otros dos: 3-1, 1-3 o 2-2. Es decir, 3 posibilidades.	1 punto	
Si llegó en dos pasos, entonces su tercer lanzamiento ha sido un 4 y los dos primeros: 3-1, 1-3 o 2-2. Es decir, 3 posibilidades.	1 punto	
Si llegó por tercera vez, es porque ha sacado tres veces el 4: una posibilidad.	1 punto	
En total, hay 10 posibilidades diferentes para las tres primeras tiradas de András.	1 punto	
Total:	**7 puntos**	

9. b) **tercer método**		
András ha sacado la primera vez: 4, 3, 2 o 1.	1 punto	*También se dará este punto si estas explicaciones se deducen de la resolución del ejercicio.*
Si el primer lanzamiento fue un 4, entonces las posibles series de tiros son (en orden decreciente) 4-4-4, 4-3-1, 4-2-2, 4-1-3. Son 4 posibilidades.	2 puntos	
Si el primer tiro fue 3, entonces la única serie posible es 3-1-4. 1 posibilidad.	1 punto	
Si el primer tiro fue 2, entonces las posibles series son: 2-2-4 y 2-1-1. 2 posibilidades.	1 punto	
Si el primer tiro fue un 1, entonces las posibles series son: 1-3-4, 1-2-1, 1-1-2. 3 posibilidades.	1 punto	
En total, hay 10 posibilidades diferentes para las tres primeras tiradas de András.	1 punto	
Total:	**7 puntos**	

Notas:
I) Si el examinante sin justificación, pero en orden lógico (es posible entender el razonamiento seguido), enumera exactamente las 10 posibilidades sin errores, recibirá 6 puntos.

II) Si el examinante sin justificación y sin un orden lógico (desordenadamente) da la respuesta correcta, es decir, están enumeradas todas las series sin falta y son correctas, recibirá 4 puntos (porque no despeja la duda de la existencia de otras posibilidades).

Si el examinante sin justificación, solo enumerando, da series de tiros, pero comete errores (faltan series, da mal o más de una vez alguna serie), entonces puede recibir puntos según la tabla siguiente.

Errores	*Puntos de acuerdo a la nota I*	*Puntos de acuerdo a la nota II*
1	5	3
2	4	2
3	3	1
4	2	0
5	1	0
6 o más	0	0