ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2016. május 3.

MATEMATIKA
NÉMET NYELVEN

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI
ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI
ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK
MINISZTÉRIUMA

Wichtige Hinweise

Formvorschriften:

1. Die Arbeit ist mit einem **andersfarbigen Stift**, als der Abiturient ihn benutzt hat, **lesbar** zu korrigieren.
2. In den Kästchen neben den Aufgaben steht zuerst die maximale Punktzahl. Der Korrektor trägt die von ihm gegebene **Punktzahl in das zweite Kästchen** ein.
3. **Bei einwandfreier Lösung** markieren Sie neben der maximalen Punktzahl mit Haken, dass Sie die Gedankeneinheit gesehen haben, und sie als richtig beurteilt haben.
4. Bei fehlerhaften oder mangelhaften Lösungen **markieren** Sie den Fehler und geben Sie bitte auch die **Teilpunkte** für die richtigen Schritte an. Wenn die Korrektur besser nachvollziehbar ist, dann dürfen auch die verlorenen Punkte markiert werden. Kein Teil darf in der Arbeit bleiben, wo nach der Korrektur nicht eindeutig ist, ob er richtig, falsch oder überflüssig ist.
5. Während der Korrektur **benutzen Sie die folgenden Bezeichnungen:**
   - richtiger Schritt: *Haken*
   - theoretischer Fehler: *zweimaliges Unterstreichen*
   - Rechenfehler oder sonstige, nicht theoretischer Fehler: *einmaliges Unterstreichen*
   - mit falschen Ausgangsdaten durchgeführter richtiger Schritt: *gestrichelter oder durchgestrichener Haken*
   - mangelhafte Begründung, mangelhaftes Aufzählen, andere Mängel: *Mangelzeichen*
   - nicht verständlicher Teil: *Fragezeichen und/oder Wellenlinie*
6. Mit **Bleistift** geschriebenen Teile außer Abbildungen dürfen nicht bewertet werden.

Inhaltliche Fragen:

1. Bei einigen Aufgaben sind verschiedene Lösungswege angegeben. Wenn eine von diesen **unterschiedlichen Lösungen** vorkommt, suchen Sie die gleichwertigen Teile und verteilen die Punkte entsprechend.
2. Die vorgeschriebenen Punktzahlen lassen sich weiter **zerlegen, es sei denn der Lösungsschlüssel das nicht erlaubt**, dürfen aber nur als ganze Punkte vergeben werden.
3. Wenn der Schüler einen **Rechenfehler** macht oder ungenau wird, bekommt er nur für den Teil keinen Punkt, wo der Fehler lag. Wenn er mit falschem Teilergebnis, aber mit richtigem Gedankengang weiterrechnet, und dadurch das zu lösende Problem sich nicht wesentlich verändert, sind die weiteren Teilpunkte zu gewähren.
4. Begeht der Schüler einen **theoretischen Fehler**, so bekommt er innerhalb einer Gedankeneinheit (diese wird in der Anweisung mit Doppellinie markiert) auch für die formell richtigen mathematischen Schritte keinen Punkt. Wenn der Schüler in einer folgenden Teilaufgabe oder Gedankeneinheit mit diesem falschen Ergebnis als Ausgangswert richtig weiterrechnet, dadurch aber das zu lösende Problem sich nicht wesentlich verändert, bekommt er die maximale Punktzahl für diesen neuen Teil.

5. Wenn in der Anweisung eine **Einheit** oder eine **Bemerkung** in Klammern steht, dann kann die Lösung auch ohne diese mit voller Punktzahl bewertet werden.
6. Bei mehreren Lösungen für eine Aufgabe ist **nur die eine zu bewerten, die der Schüler markiert hat**. Während der Korrektur markieren Sie eindeutig, welche Version bewertet wurde, welche nicht.
7. **Zusatzpunkte** (mehr Punkte als die vorgeschriebene maximale Punktzahl für die Aufgabe) sind **nicht zugelassen**.
8. Die Gesamtpunktzahl einer Aufgabe oder Teilaufgabe **darf nicht negativ sein.**
9. Es gibt **keinen Punktabzug** für Berechnungen und Schritte, die zwar falsch sind, aber vom Schüler bei der Lösung der Aufgabe nicht weiterverwendet werden.
10. Wenn **Abbildungen** als Beweise verwendet werden (z.B. das Ablesen der Daten durch Messung), ist nicht akzeptabel.
11. Bei der Angabe von **Wahrscheinlichkeiten** (wenn der Text der Aufgabe nichts Anderes sagt) dürfen auch in Prozent angegebene richtige Lösungen akzeptiert werden.
12. Wenn der Text der Aufgabe keine Rundung vorschreibt, dann sind auch Teil- und Endergebnisse akzeptierbar, die vom Lösungsschlüssel abweichen aber **sinnvoll und richtig gerundet wurden**.
13. **Im Teil II sind aus den 5 Aufgaben nur Lösungen von 4 Aufgaben zu bewerten.** Der Abiturient hat die Nummer der Aufgabe, die nicht bewertet werden soll, in das entsprechende Kästchen – vermutlich – eingetragen. Dementsprechend wird die eventuell vorhandene Lösung für diese Aufgabe nicht korrigiert. Wenn die abgewählte Aufgabe nicht eindeutig feststeht, und die Wahl der Aufgabe in der Arbeit nicht eindeutig zu sehen ist, dann ist die nicht zu bewertende Aufgabe automatisch die letzte Aufgabe der vorgegebenen Aufgabenreihe.

Achtung! Der Teil „**Wichtige Hinweise**" am Anfang des Lösungsschlüssels hat sich wesentlich verändert. Bitte, studieren Sie ihn gründlich vor der Korrektur!

I.

1. a) erste Lösung		
Wenn man beide Seiten der Gleichung quadriert: $\frac{4x^2+44x+121}{9}=x^2+6x+9$.	2 Punkte	
$x^2+2x-8=0$	2 Punkte	
$x = 2$ oder $x = –4$.	1 Punkt	
Nach dem Einsetzen der Lösungen bekommt man, dass beide Ergebnisse Lösungen der Gleichung sind.	1 Punkt	
Insgesamt:	**6 Punkte**	

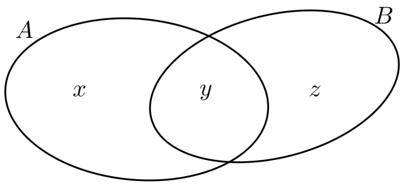
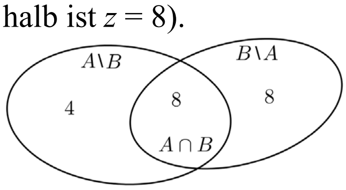
1. a) zweite Lösung		
$\frac{2x+11}{3}=\lvert x+3\rvert$	1 Punkt	
Wenn $x\geq -3$, dann: $\frac{2x+11}{3}=x+3$,	1 Punkt	
woraus $x = 2$ ist, (das ist wirklich nicht kleiner als –3).	1 Punkt	
Wenn $x < –3$, dann: $\frac{2x+11}{3}=-x-3$,	1 Punkt	
woraus $x = –4$ ist (das ist wirklich kleiner als –3).	1 Punkt	
Probe: Bezug auf Äquivalenz oder durch Einsetzen.	1 Punkt	
Insgesamt:	**6 Punkte**	

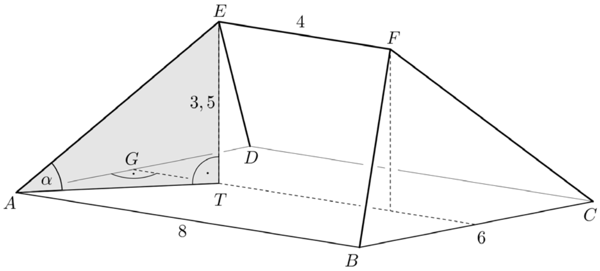
1. b)		
$x > 3$	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn der Kandidat die Lösung durch Einsetzen ausprobiert.*
(Aus der Definition und den Identitäten des Logarithmus:) $\log_2\frac{(x+1)(x-3)}{x+9}=$	1 Punkt	
$=\log_2 2$	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn dieser Gedankengang nur aus dem nächsten Schritt hervorkommt.*
(Da die Logarithmus-Funktion ein-eindeutig ist:) $\frac{(x+1)(x-3)}{x+9}=2$	1 Punkt	
Geordnet ist: $x^2-4x-21=0$.	1 Punkt	
Die Lösungen sind 7 und –3.	1 Punkt	
Probe: –3 nicht, aber 7 ist die Lösung der ursprünglichen Gleichung (Durch Einsetzen oder Bezug auf den Definitionsbereich und die äquivalenten Umformungen)	1 Punkt	
Insgesamt:	**7 Punkte**	

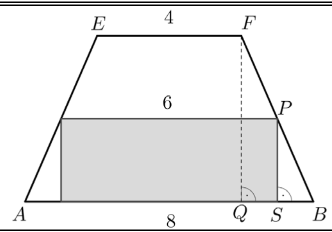
2. a) **erste Lösung**		
5 Schüler haben eine 5 in Physik,	1 Punkt	
und 7 Schüler haben eine 5 in Mathematik.	1 Punkt	
5 + 7 = 12, aber nur 10 Schüler haben in mindestens 1 Fach eine 5, deshalb	1 Punkt	
haben 2 Schüler in beiden Fächern eine 5.	1 Punkt	
Insgesamt:	**4 Punkte**	

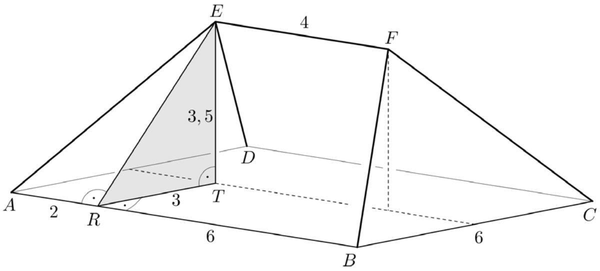
2. a) **zweite Lösung**		
(Wenn in beiden Fächern x Schüler eine 5 haben, dann) nur in Physik $5 - x$,	1 Punkt	
nur in Mathe $7 - x$ Schüler haben eine 5.	1 Punkt	
$5 - x + x + 7 - x = 10$	1 Punkt	
$x = 2$, d.h. in beiden Fächern haben 2 Schüler eine 5.	1 Punkt	
Insgesamt:	**4 Punkte**	

Anmerkung: Wenn der Schüler anhand einer richtig gezeichneten und ausgefüllten Mengenabbildung das richtige Ergebnis angibt, bekommt er die volle Punktzahl.

2. b)		
Fertigen wir ein Venn-Diagramm!  (x, y, z bezeichnen der Reihe nach die Anzahl der Elemente der Mengen $A \setminus B$, $A \cap B$, bzw. $B \setminus A$).	1 Punkt	
Wenn das erste Glied der arithmetischen Folge x, das zweite Glied y, das dritte Glied $x + y$ sind,	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn dieser Gedankengang nur aus der Lösung hervorkommt.*
ist die Differenz der Folge $(x + y) - y = x$.	1 Punkt	
Die Anzahl der Elemente der Menge A ist $3x$, von B (das 4. Glied der Folge) $4x$.	1 Punkt	
Die Summe der Anzahl der Elemente der Mengen A und B ist 28, deshalb ist $3x + 4x = 28$.	1 Punkt	
Das erste Glied und die Differenz der Folge sind beide 4.	1 Punkt	
Probe: Die Anzahl der Elemente von B ist 16 (deshalb ist $z = 8$).  $\|A \setminus B\| = 4$, $\| A \cap B \| = 8$, $\| A \| = 12$, $\| B \| = 16$. Diese vier Zahlen sind wirklich die aufeinanderfolgenden Glieder einer arithmetischen Folge.	1 Punkt	
Insgesamt:	**7 Punkte**	

3. a)		
 (Benutzen wir die Bezeichnungen der Abbildung!) Im rechtwinkligen Dreieck *ATG* sind *GT* = 2 m und *AG* = 3 m,	1 Punkt	
so ist (aus dem Pythagoreischen Lehrsatz) $AT = \sqrt{13}$ (≈ 3,61) (m).	1 Punkt	$GE = \sqrt{3{,}5^2 + 2^2} =$ $= \sqrt{16{,}25}$ (≈ 4,03) (m)
(Im rechtwinkligen Dreieck *ATE* benutzt man den Pythagoreischen Lehrsatz) $AE = \sqrt{AT^2 + ET^2} =$	1 Punkt	$AE = \sqrt{GE^2 + GA^2}$
$= \sqrt{25{,}25} \approx 5$ (m) lang sind die Balken.	1 Punkt	
Der eingeschlossene Winkel der Balken ist der in der Abbildung mit α bezeichnete Winkel *EAT,*	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn dieser Gedankengang nur aus der Lösung hervorkommt.*
wofür $\sin\alpha = \frac{ET}{AE}$ (≈ 0,6965) gilt,	1 Punkt	
so ist $\alpha \approx 44°$.	1 Punkt	
Insgesamt:	**7 Punkte**	

3. b)		
Die Länge einer Seite der rechteckigen Solarzelle kann höchstens die Mittellinie des Trapezes sein,	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn dieser Gedankengang nur aus der Lösung hervorkommt.*
d.h. 6 Meter.	1 Punkt	
Die andere Seite des Rechtecks ist konstant, weil sie die Hälfte der Höhe des Trapezes ist. (in der Abbildung ist *PS* die Mittellinie des rechteckigen Dreiecks *FQB*).	1 Punkt	

(Benutzen wir die Bezeichnungen der Abbildung!) Wenn man die Höhe des Trapezes aus dem rechteckigen Dreieck *ETR* berechnet: $ER=\sqrt{ET^2+TR^2}=\sqrt{3{,}5^2+3^2}=\sqrt{21{,}25}$ (≈ 4,61) (m).	1 Punkt	*(Mit den Bezeichnungen der obigen Abbildung:)* $PS=\sqrt{PB^2-SB^2}=$ $=\sqrt{6{,}3125-1}=$ $=\sqrt{5{,}3125}$ (≈ 2,30) (m)
Die Fläche der größten Solarzelle ist: $\frac{6\cdot\sqrt{21{,}25}}{2}$ (≈ 13,83) (m^2).	1 Punkt	*Die Fläche der größten Solarzelle ist:* $6\cdot\sqrt{5{,}3125}$ (≈ 13,83) (m^2)
Höchstens eine 13,8 m^2 große Solarzelle kann angebracht werden.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist nicht zu geben, wenn der Kandidat nicht oder falsch rundet.*
Insgesamt:	**6 Punkte**	

4. a)		
Die Einnahmen aus den Karten beim Einzelpreis von 1500 Ft und bei 1000 Zuschauern ist 1 500 000 Ft.	1 Punkt	
Wenn man *n*-mal den Preis um 5 Ft erhöht ($n\in\mathbf{N}^+$), dann wird die Zuschauerzahl (nach dem Modell) 1000 – 10*n* sein.	1 Punkt	
Die neue Einnahme ist (1500 + 5*n*)(1000 – 10*n*) =	1 Punkt	
= 1 500 000 – 10 000*n* – 50*n*^{2} Ft,	1 Punkt	
die kleiner ist, als 1 500 000 Ft,	1 Punkt*	
Weil positive Zahlen daraus subtrahiert werden.	1 Punkt*	
Insgesamt:	**6 Punkte**	

*Die mit * markierten 2 Punkte kann der Kandidat auch für den folgenden Gedankengang bekommen:*

Wenn *b* die Einnahmefunktion ist (in der Menge der positiven Zahlen definiert) $b(n)=-50n^2-10\ 000n+1\ 500\ 000$, dann ist $b'(n)=-100n-10\ 000$.	1 Punkt	
Die Ableitungsfunktion ist im ganzen Definitionsbereich negativ, also die Funktion b ist streng monoton fallend. (So ist auch die Funktion b in der Menge der positiven ganzen Zahlen.)	1 Punkt	

4. b)		
Wenn man m-mal den Preis der Karten um 5 Ft reduziert, wird die Zuschauerzahl $1000 + 10m$ sein ($m \in \mathbf{Z}$).	1 Punkt	
Die neue Einnahme ist $(1500 - 5m)(1000 + 10m) =$	1 Punkt	
$= 1\,500\,000 + 10\,000m - 50m^2$ (Ft).	1 Punkt	
Im vollständigen Quadrat: $-50(m - 100)^2 + 2\,000\,000$, also ist	2 Punkte*	
$m = 100$ die Maximumstelle.	1 Punkt*	
Dann ist der Preis der Karte $(1500 - 100 \cdot 5 =)$ 1000 Ft.	1 Punkt	
Die größte Einnahme ist $(1000 \cdot 2000 =)$ 2 000 000 Ft.	1 Punkt	
Insgesamt:	**8 Punkte**	

*Die mit * markierten 3 Punkte kann der Kandidat auch für einen der folgenden Gedankengänge bekommen:*

Wenn f die reelle Einnahmefunktion ist $f(m) = -50m^2 + 10\,000m + 1\,500\,000$, dann ist $f'(m) = -100m + 10\,000$.	1 Punkt	
Ha $f'(m) = 0$, dann ist $m = 100$.	1 Punkt	
Da $f''(m) = -100 < 0$, deshalb ist 100 wirklich die Maximumstelle von f (So ist auch die Funktion b in der Menge der ganzen Zahlen.).	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn der Kandidat mit dem Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung richtig begründet.*

Wenn f die reelle Einnahmefunktion $f(m) = -50m^2 + 10\,000m + 1\,500\,000$ ist, dann sind ihre Nullstellen 300 und –100.	1 Punkt	
f hat ein Maximum und es wird am arithmetischen Mittel der Nullstellen aufgenommen.	1 Punkt	
Die Maximumstelle von f ist also 100. Das ist zugleich die Stelle der maximalen Einnahme.	1 Punkt	

II.

5. a) **erste Lösung**		
Vom ersten Automaten werden 80, vom zweiten 170 fehlerhafte Hemden hergestellt.	1 Punkt	
(Fehlerhafte Hemden kann man aus 250 Hemden auswählen, also) die Anzahl aller Fälle ist 250.	1 Punkt	*Diese 2 Punkte sind auch zu geben, wenn dieser Gedankengang nur aus der Lösung hervorkommt.*
(Aus 170 fehlerhaften Hemden, die vom 2. Automaten hergestellt wurden, kann man ein fehlerhaftes Hemd auswählen, also ist) die Anzahl der günstigen Fälle 170.	1 Punkt	
Die gefragte Wahrscheinlichkeit ist $\frac{170}{250} =$	1 Punkt	
$= 0{,}68$.	1 Punkt	*In Prozent angegebene richtige Lösung ist auch akzeptabel.*
Insgesamt:	**5 Punkte**	

5. a) **zweite Lösung**		
Vom ersten Automaten werden 80, vom zweiten 170 fehlerhafte Hemden hergestellt.	1 Punkt	
Bezeichne man das Ereignis, dass das ausgewählte Hemd von der zweiten Maschine hergestellt wurde mit A, mit B das Ereignis, dass das Hemd fehlerhaft ist. So ist die gefragte Wahrscheinlichkeit: $P(A\vert B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn dieser Gedankengang nur aus der Lösung hervorkommt.*
$P(AB)=\frac{170}{9000}=\frac{17}{900}$	1 Punkt	
$P(B)=\frac{250}{9000}=\frac{25}{900}$	1 Punkt	
$P(A\vert B)=\frac{\frac{17}{900}}{\frac{25}{900}}=\frac{17}{25}=0{,}68$	1 Punkt	*In Prozent angegebene richtige Lösung ist auch akzeptabel.*
Insgesamt:	**5 Punkte**	

5. b)		
Sei x der Preis des Hemdes vor der Preissenkung, und sei $q = 1 - \frac{p}{100}$.	1 Punkt	
(Wenn die zwei Preissenkungen in umgekehrter Reihenfolge durchgeführt worden wären, dann wäre der Preis des Hemdes nach der zweimaligen Preissenkung xq – 500 Ft, also) $(xq - 500) + 50 = (x - 500) \cdot q$.	2 Punkte	
(Wenn die Preissenkung beide Male p% wäre, wäre der neue Preis xq^2 Ft, also) $(x - 500) \cdot q + 90 = xq^2$.	2 Punkte	
Aus der ersten Gleichung ist q = 0,9,	1 Punkt	
also ist p = 10.	1 Punkt	
(Wenn man den Wert von q in die zweite Gleichung einsetzt) $(x - 500) \cdot 0{,}9 + 90 = x \cdot 0{,}81$.	1 Punkt	
x = 4000	1 Punkt	
Der ursprüngliche Preis des Hemdes ist 4000 Ft, p ist 10.	1 Punkt	
Probe: 4000 – 500 = 3500, 10% reduziert: 3150; 4000 10% reduziert: 3600, 3600 – 500 = 3100; 4000 10%reduziert: 3600, wieder 10% reduziert 3240. 3150 = 3100 + 50 und 3150 = 3240 – 90, also die erhaltenen Werte sind richtig.	1 Punkt	*Dieser Punkte ist nur dann zu geben, wenn der Kandidat nur durchs Einsetzen in den Text der Aufgabe die Lösung überprüft.*
Insgesamt:	**11 Punkt**	

6. a)		
Aus der Gleichung $\cos x + 2 = \sin x + 2$: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).	1 Punkt	*Wenn der Kandidat die Endpunkte des Intervalls ohne Rechnung abliest, und sie durch Einsetzen nicht kontrolliert, darf er diesen Punkt nicht bekommen.*
Aus der obigen Lösung folgt, dass die ersten Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Kurven $-\frac{3\pi}{4}$, bzw. $\frac{\pi}{4}$ sind.	1 Punkt	
$T = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left((\cos x + 2) - (\sin x + 2)\right) dx =$	2 Punkte	$T = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x + 2)dx -$ $- \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + 2)dx =$
$= [\sin x + \cos x]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$	2 Punkte	$= [\sin x + 2x]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} -$ $-[-\cos x + 2x]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$
$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$	1 Punkt	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\pi}{2}\right) -$ $-\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\pi}{2}\right)\right] =$ $= \left(\sqrt{2} + 2\pi\right) - \left(-\sqrt{2} + 2\pi\right) =$
$= 2\sqrt{2}$ ($\approx 2{,}83$)	1 Punkt	
Insgesamt:	**8 Punkte**	

6. b) erste Lösung		
$a_1 = -\frac{6}{5}$, $a_2 = -\frac{17}{2}$, $a_3 = 28$.	1 Punkt	
Da $a_2 < a_1 < a_3$, ist die Folge nicht monoton.	1 Punkt	
Wenn $n \geq 4$ ist, ist $a_n > 0$ (weil sowohl der Zähler als auch der Nenner sind positiv), also die Folge ist nach unten beschränkt (z.B. $-\frac{17}{2}$ ist eine untere Schranke).	1 Punkt	

(Der Bruch umgeformt ist:) $a_n=\dfrac{11-\frac{5}{n}}{3-\frac{8}{n}}$.	1 Punkt	$a_n=\dfrac{11n-5}{3n-8}=$ $=\dfrac{\frac{11}{3}\cdot(3n-8)+\frac{73}{3}}{3n-8}=$
Wenn $n\geq 4$ ist, dann ist der Zähler kleiner als 11, der Nenner ist mindestens 1,	1 Punkt	$=\dfrac{11}{3}+\dfrac{73}{9n-24}$
dann gilt: $a_n<\dfrac{11}{1}=11$.	1 Punkt	*Wenn* $n\geq 4$ ist, *dann ist es kleiner als 10* ($a_n\leq\dfrac{11}{3}+\dfrac{73}{12}=\dfrac{39}{4}<10$).
($a_2<a_3=28$ und $a_1<a_3=28$ gelten, also) die Folge ist nach oben beschränkt, da 28 eine obere Schranke ist.	1 Punkt	
Die untersuchte Folge ist also (sowohl nach unten als auch nach oben, deshalb) beschränkt.	1 Punkt	
Insgesamt:	**8 Punkte**	

6. b) zweite Lösung		
$a_1=-\dfrac{6}{5}$, $a_2=-\dfrac{17}{2}$, $a_3=28$.	1 Punkt	
Da $a_2<a_1<a_3$ ist, ist die Folge nicht beschränkt.	1 Punkt	
Wenn man den Bruch von $\{a_n\}$ umformt: $a_n=\dfrac{11-\frac{5}{n}}{3-\frac{8}{n}}$.	1 Punkt	$a_n=\dfrac{11n-5}{3n-8}=$ $=\dfrac{\frac{11}{3}\cdot(3n-8)+\frac{73}{3}}{3n-8}=$
Die Folge $\{b_n\}$ im Zähler ist konvergent (Grenzwert ist 11) und	1 Punkt	$=\dfrac{11}{3}+\dfrac{73}{9n-24}$
auch die Folge $\{c_n\}$ ist konvergent (Grenzwert 3).	1 Punkt	*Wenn* $d_n=\dfrac{73}{9n-24}$ *ist, ist* $\{d_n\}$ *konvergent (Grenzwert 0),*
Deshalb ist auch der Quotient der Folgen $\{b_n\}$ und $\{c_n\}$ konvergent, also ist auch die Folge $\{a_n\}$ konvergent (Grenzwert: $\dfrac{11}{3}$).	1 Punkt	*deshalb ist auch* $\{a_n\}$ *konvergent (Grenzwert* $\dfrac{11}{3}$*).*
Alle konvergenten Folgen sind zugleich beschränkt,	1 Punkt	
deshalb ist auch die Folge $\{a_n\}$ konvergent.	1 Punkt	
Insgesamt:	**8 Punkte**	

7. a) **erste Lösung**		
Die Zahl der dreistelligen Zahlen, die keine 0 enthalten ist: 9^3 (= 729).	1 Punkt	
Unter denen gibt es solche 8^3 (= 512) die die Ziffer 1 nicht enthalten.	1 Punkt	
$9^3 - 8^3$ (= 217) solche Zahlen gibt es, die die Bedingung erfüllen.	1 Punkt	
Die Zahl der zweistelligen Zahlen ist $9^2 - 8^2$ (= 17)	1 Punkt	
und es gibt noch eine einstellige, die 1.	1 Punkt	
Die Zahl der entsprechenden Zahlen ist die Summe dieser, also $9^3 - 8^3 + 9^2 - 8^2 + 1$ (= 235).	1 Punkt	
Insgesamt:	**6 Punkte**	

7. a) **zweite Lösung**		
Unter den dreistelligen, die keine 0 und genau eine 1 enthalten, gibt es $3 \cdot 8 \cdot 8$ (= 192) Zahlen.	1 Punkt	
Zwei 1-en enthalten $3 \cdot 8$ (= 24) Zahlen,	1 Punkt	
die 111 enthält alleine 3 1-en.	1 Punkt	
Unter den zweistelligen, die keine 0 und genau eine 1 enthalten, gibt es $2 \cdot 8$ (= 16) Zahlen, zwei 1-en enthält nur die 11, es gibt also insgesamt 17 entsprechende zweistellige Zahlen,	1 Punkt	
es gibt noch eine einstellige, die 1.	1 Punkt	
Die Zahl der entsprechenden Zahlen ist die Summe dieser, also 235.	1 Punkt	
Insgesamt:	**6 Punkte**	

7. b)		
Wenn man (die einzige) *m* Zahl auf *m* + 10 tauscht, dann (verändert sich die Zahl der Daten nicht, und) die Summe der Zahlen wächst um 10.	1 Punkt	$22n + 10 = 24n$
Der Durchschnitt wächst um 2, so ist die Anzahl der Daten $\left(\frac{10}{2} =\right) 5$.	1 Punkt	$n = 5$
Insgesamt:	**2 Punkte**	

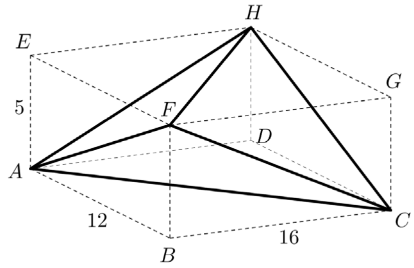
7. c)		
Die Summe der 5 Daten ist in der originalen Grundgesamtheit ($5 \cdot 22 =$) 110.	1 Punkt	
Da der Modus 32 ist, ist die Häufigkeit von 32 mindestens 2.	1 Punkt	
Wenn man die fünf Daten in nicht fallender Reihenfolge aufschreibt, ist in der Reihe die Zahl vor dem Median m die Zahl $m - 4$ (Begründung: Wenn m um 5 reduziert wird, dann tritt diese Zahl in der neuen Grundgesamtheit an die Stelle von m.).	2 Punkte*	*$m - 4 = 10$ ist nicht möglich (z.B., weil so die Summe der fünf Daten nicht 110 sein könnte).*
Die kleinste Zahl ist die 10, so ist $10 + (m - 4) + m + 32 + 32 = 110$.	1 Punkt*	
Daraus ist $m = 20$.	1 Punkt*	
Die Zahlen sind also die folgenden: 10, 16, 20, 32, 32.	1 Punkt	
Probe: Der Durchschnitt der fünf Zahlen ist 22; wenn man 20 auf 30 tauscht, dann ist der Durchschnitt 24; wenn man statt 20 15 schreibt, dann ist der Median16.	1 Punkt	
Insgesamt:	**8 Punkte**	

*Die mit * markierten 4 Punkte kann der Kandidat auch für den folgenden Gedankengang bekommen:*

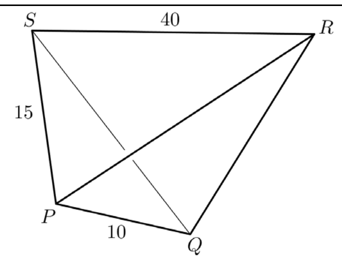
Unter den fünf Zahlen kommt die 10 (und sie ist zugleich die kleinste Zahl) und die 32 mindestens zweimal vor.	1 Punkt	
Die Summe der zwei nicht bekannten Daten ist: $110 - (10 + 32 + 32) = 36$.	1 Punkt	
Diese zwei Zahlen sind positive ganze Zahlen. Dann sind die folgenden Summen möglich: $10 + 26 = 11 + 25 = ... = 17 + 19$.	1 Punkt	
Unter ihnen entsprechen nur 16 und 20 den Bedingungen der Aufgabe.	1 Punkt	

8. a)		
Man kann das Volumen des Tetraeders $ACFH$ bekommen, indem man aus dem Volumen des Quaders die Volumina der drei kongruenten Tetraeders in den Ecken B, D, G, E subtrahiert.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn dieser Gedankengang nur aus der Lösung hervorkommt.*
Das Volumen eines solchen Tetraeders ist $\frac{5 \cdot 12 \cdot 16}{6} = 160$ (cm^3).	1 Punkt	
das Volumen von $ACFH$ ist $5 \cdot 12 \cdot 16 - 4 \cdot \frac{5 \cdot 12 \cdot 16}{6} =$	1 Punkt	
$= 320$ cm^3.	1 Punkt	
Insgesamt:	**4 Punkte**	

Anmerkung: Nur für das Berechnen einer Seitenfläche des Tetraeders ACFH darf kein Punkt gegeben werden.

8. b)		
 Richtige Abbildung (richtiges Einzeichnen des Tetraeders).	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn der Schüler ohne Abbildung, aber richtig arbeitet.*
Die Diagonalen kongruenter Rechtecke sind jeweils gleichlang, deshalb ist $AC = FH$, $AF = CH$ und $AH = CF$.	1 Punkt	
Die Seiten des Tetraeders sind also solche Dreiecke, dessen Seiten paarweise gleichlang sind, deshalb sind sie kongruent.	1 Punkt	
Insgesamt:	**3 Punkte**	

8. c)		
Um zu beweisen, dass die Seitendreiecke spitzwinklig sind, reicht es einzusehen, dass der größte Winkel dieser Dreiecke ein spitzer Winkel ist.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn der Kandidat alle drei Winkel richtig berechnet. (83,4°; 56,4°; 40,2°)*
z.B. im Dreieck AFH (mit dem Pythagoreischen Lehrsatz) $AF = 13 < AH = \sqrt{281} < FH = 20$,	1 Punkt	
so ist der Cosinus des Winkels φ gegenüber der Seite FH (aus dem Cosinussatz): $\cos\varphi = \dfrac{169+281-400}{2\cdot 13\cdot\sqrt{281}}$ ($\approx 0{,}1147$).	2 Punkte	
Da das eine positive Zahl ist, ist φ wirklich ein spitzer Winkel.	1 Punkt	
Insgesamt:	**5 Punkte**	

8. d)		
Im Dreieck PRS sind $PS = 15$ cm und $SR = 40$ cm, deshalb kann (wegen der Dreiecksungleichung aus 20, 25, bzw. 30 cm) nur $PR = 30$ cm.	1 Punkt	
Im Dreieck PQS ist $PS + PQ = 25$, deshalb kann nur $QS = 20$ cm sein.	1 Punkt	
So kann nur $QR = 25$ cm sein, und dann existiert auch das Dreieck RSQ (weil $20 + 25 > 40$ ist).	1 Punkt	
Es gibt nur ein einziges entsprechendes Tetraeder.	1 Punkt	
Insgesamt:	**4 Punkte**	

9. a) **erste Lösung**		
In einem, zwei, drei oder vier Schritten kann man auf das Feld 4 kommen.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn dieser Gedankengang nur aus der Lösung hervorkommt.*
In einem Schritt kann man auf das Feld 4 kommen, wenn man 4 würfelt, die Wahrscheinlichkeit ist $\frac{1}{6}$.	1 Punkt	
In zwei Schritten kann man mit den folgenden Möglichkeiten auf das Feld 4 kommen: 3-1, 2-2 oder 1-3.	1 Punkt	
Die Wahrscheinlichkeit ist insgesamt $\left(3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\right)\frac{3}{36}$.	1 Punkt	
In drei Schritten kann man mit den folgenden Möglichkeiten auf das Feld 4 kommen: 1-1-2, 1-2-1 oder 2-1-1.	1 Punkt	
Die Wahrscheinlichkeit ist insgesamt $\left(3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\right)\frac{3}{216}$.	1 Punkt	
In vier Schritten kann man nur auf das Feld 4 kommen, wenn man viermal 1 würfelt, die Wahrscheinlichkeit ist $\left(\frac{1}{6}\right)^4=\frac{1}{1296}$.	1 Punkt	
Die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens einmal auf das Feld 4 kommt, ist die Summe der vorherigen,	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn dieser Gedankengang nur aus der Lösung hervorkommt.*
also $\frac{343}{1296}\approx 0{,}265$.	1 Punkt	*In Prozent angegebene richtige Lösung ist auch akzeptabel.*
Insgesamt:	**9 Punkte**	

9. a) **zweite Lösung**		
Der erste Wurf kann 4, 3, 2 oder 1 sein.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn dieser Gedankengang nur aus der Lösung hervorkommt.*
Wenn der erste Wurf 4 war, dann kommt man gleich auf das Feld 4. Die Wahrscheinlichkeit ist $\frac{1}{6}$.	1 Punkt	
Wenn der erste Wurf 3 war, dann kann man nur mit einem weiteren 1 auf das Feld 4 kommen. Die Wahrscheinlichkeit ist $\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$.	1 Punkt	
Wenn der erste Wurf 2 war, dann kann man entweder mit einem weiteren 2 oder mit zwei 1-en auf das Feld 4 kommen.	1 Punkt	
Die Wahrscheinlichkeit ist $\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{36}+\frac{1}{216}$.	1 Punkt	
Wenn der erste Wurf 1 war, dann kann man mit den folgenden Würfen auf das Feld 4 kommen: 3, 2-1, 1-2 oder 1-1-1.	1 Punkt	
Die Wahrscheinlichkeit ist $\left(\frac{1}{6}\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3+\left(\frac{1}{6}\right)^4=\frac{1}{36}+\frac{2}{216}+\frac{1}{1296}$.	1 Punkt	
Die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens einmal auf das Feld 4 kommt, ist die Summe der vorherigen,	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn dieser Gedankengang nur aus der Lösung hervorkommt.*
also $\frac{343}{1296}\approx 0{,}265$.	1 Punkt	*In Prozent angegebene richtige Lösung ist auch akzeptabel.*
Insgesamt:	**9 Punkte**	

9. a) **dritte Lösung**		
Berechne man die Wahrscheinlichkeit des Komplementärereignisses. Wenn man nicht auf das Feld 4 kommt, dann wird es in den 1., 2., 3. oder 4. Schritt übersprungen.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn dieser Gedankengang nur aus der Lösung hervorkommt.*
Wenn man es im ersten Schritt überspringt, dann war der Wurf 5 oder 6. Die Wahrscheinlichkeit ist $\frac{2}{6}$.	1 Punkt	
Wenn man es im zweiten Schritt überspringt, dann bei den ersten Würfen: 1-4, 1-5, 1-6, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6, 3-2, 3-3, 3-4, 3-5, 3-6 vorkommen. Die Wahrscheinlichkeit ist $\frac{12}{36}$.	2 Punkte	*Gruppierung nach der Summe der zwei Würfe:* 1-4, 2-3, 3-2; 1-5, 2-4, 3-3; 1-6, 2-5, 3-4; 2-6, 3-5; 3-6.
Wenn man es im dritten Schritt überspringt, dann nach den ersten Würfen 2-1 oder 1-2 muss der dritte Wurf ungleich der Zahl 1 sein (mindestens 2 wird geworfen). Bei den ersten Würfen 1-1 kann der dritte Wurf 3,4,5 oder 6 sein (mindestens 3 wird geworfen). Die Wahrscheinlichkeit ist $\frac{14}{216}$.	2 Punkte	2-1-2, 1-2-2, 1-1-3; 2-1-3, 1-2-3, 1-1-4; 2-1-4, 1-2-4, 1-1-5; 2-1-5, 1-2-5, 1-1-6; 2-1-6, 1-2-6.
Wenn man es im vierten Schritt überspringt, dann waren die ersten drei Würfe 1-1-1, der vierte müsste 2,3,4,5 oder 6 sein (mindestens 2 wird geworfen). Die Wahrscheinlichkeit ist $\frac{5}{1296}$.	1 Punkt	
Die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens einmal auf das Feld 4 kommt, erhält man, wenn die Summe der vorherigen aus 1 subtrahiert wird.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn dieser Gedankengang nur aus der Lösung hervorkommt.*
Die Wahrscheinlichkeit ist $1-\left(\frac{2\cdot 216+12\cdot 36+14\cdot 6+5}{1296}\right)=\frac{343}{1296}\approx 0{,}265.$	1 Punkt	*In Prozent angegebene richtige Lösung ist auch akzeptabel.*
Insgesamt:	**9 Punkte**	

9. b) **erste Lösung**		
Die Möglichkeiten werden danach gruppiert, wie viel Mal Andreas bei den ersten drei Würfen eine 4 geworfen hat.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn dieser Gedankengang nur aus der Lösung hervorkommt.*
Dreimal eine 4 geworfen: 1 Möglichkeit.	1 Punkt	
Zweimal eine 4 geworfen: Das ist nicht möglich, dann müsste auch der dritte Wurf 4 sein.	1 Punkt	
Einmal eine 4 geworfen: Der erste oder der dritte Wurf kann 4 sein.	1 Punkt	
Die Summe der anderen zwei Würfe ist auch 4 (1-3, 3-1 oder 2-2); das sind in beiden Fällen 3 Möglichkeiten. Das sind insgesamt 6 Möglichkeiten.	1 Punkt	
Keine 4 geworfen: Dann waren die drei Würfe in einer Reihenfolge 1-1-2; 3 Möglichkeiten.	1 Punkt	
Insgesamt 10 verschiedene Möglichkeiten gab es zu würfeln.	1 Punkt	
Insgesamt:	**7 Punkte**	

9. b) **zweite Lösung**		
Vor dem vierten Wurf zum ersten, zweiten oder zum dritten Mal konnte Andreas auf Feld 4 stehen.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn dieser Gedankengang nur aus der Lösung hervorkommt.*
Wenn er zum ersten Mal auf dem Feld 4 steht, dann waren seine Würfe 1-1-2, 1-2-1 oder 2-1-1. 3 Möglichkeiten.	1 Punkt	
Wenn er zum ersten Mal auf dem Feld 4 steht, dann kam er zuerst entweder mit seinem ersten oder zweiten Schritt dorthin.	1 Punkt	
Wenn er zuerst mit seinem ersten Schritt auf das Feld 4 kam, dann war sein erster Wurf 4, die anderen zwei 3-1, 1-3 oder 2-2. 3 Möglichkeiten.	1 Punkt	
Wenn er zuerst mit seinem zweiten Schritt auf das Feld 4 kam, dann waren seine ersten zwei Würfe 3-1, 1-3 oder 2-2, der dritte 4. 3 Möglichkeiten.	1 Punkt	
Wenn er zum dritten Mal auf dem Feld 4 steht, dann waren beide früheren Würfe 4. 1 Möglichkeit.	1 Punkt	
Insgesamt 10 verschiedene Möglichkeiten gab es zu würfeln.	1 Punkt	
Insgesamt:	**7 Punkte**	

9. b) **dritte Lösung**		
Der erste Wurf von Andreas konnte 4, 3, 2 oder 1 sein.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn dieser Gedankengang nur aus der Lösung hervorkommt.*
Wenn der erste Wurf 4 war, dann sind die möglichen Wurfreihen (nach der Größe der Würfe geordnet) 4-4-4, 4-3-1, 4-2-2, 4-1-3. 4 Möglichkeiten.	2 Punkte	
Wenn der erste Wurf 3 war, dann ist die einzige mögliche Wurfreihe 3-1-4. 1 Möglichkeit.	1 Punkt	
Wenn der erste Wurf 2 war, dann sind die möglichen Wurfreihen 2-2-4, 2-1-1. 2 Möglichkeiten.	1 Punkt	
Wenn der erste Wurf 1 war, dann sind die möglichen Wurfreihen 1-3-4, 1-2-1, 1-1-2. 3 Möglichkeiten.	1 Punkt	
Insgesamt 10 verschiedene Möglichkeiten gab es zu würfeln.	1 Punkt	
Insgesamt:	**7 Punkte**	

Anmerkung:
I) Wenn der Kandidat ohne Begründung, aber in logischer Reihenfolge (erkennbarem System) alle der 10 möglichen Wurfreihen fehlerfrei aufzählt, bekommt er dafür 6 Punkte.

II) Wenn der Kandidat ohne Begründung und nicht in einer logischen Reihenfolge (ohne Systematik), aber er alle der 10 möglichen Wurfreihen fehlerfrei aufzählt, bekommt er dafür höchstens 4 Punkte (weil es aus der Beschreibung nicht hervorkommt, dass es keine anderen Möglichkeiten gibt).

Wenn der Kandidat durch nicht begründetes Aufzählen mögliche Wurfreihen angibt, (Er lässt Wurfreihen aus oder er gibt falsche an oder nennt Wurfreihen mehrfach), dann kann er nach der folgenden Tabelle Punkte bekommen.

Anzahl der Fehler	*Punktzahl im Fall I*	*Punktzahl im Fall II*
1	5	3
2	4	2
3	3	1
4	2	0
5	1	0
6 oder mehr	0	0