ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2006. május 9.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

- A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
- A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
- **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
- Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

- Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
- A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
- Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
- Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
- **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
- Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
- Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **csak egy** (a magasabb pontszámú) **értékelhető**.
- A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
- Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
- **A vizsgafeladatsor II./B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

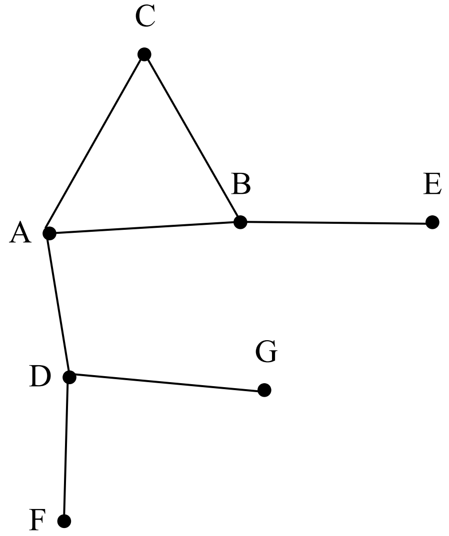
1.		
$A \cap B = \{12; 16; 20\}$	2 pont	*Ha két elemet helyesen megad, 1 pontot kaphat.*
Összesen:	**2 pont**	*Az A és B halmaz elemei külön nem pontozandók.*

2.		
A befogó: $3 \cdot \sin 42^{\circ} \approx 2{,}01$ cm.	2 pont	*A befogó: 1 pont, kerekítés: 1 pont.*
Összesen:	**2 pont**	

3.		
a) igaz	1 pont	
b) hamis	1 pont	
c) igaz	1 pont	
d) hamis	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

4.		
A módusz: 174.	1 pont	
A medián: 173.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

5.		
$3y - x = 3$ vagy $y = \frac{1}{3}x + 1$ $(x \in [-9; 9])$	3 pont	*Ha csak a meredekség helyes, akkor 1 pont jár; az y tengellyel való metszéspont helyessége is 1 pontot ér.*
Összesen:	**3 pont**	*Akkor is jár a 3 pont, ha a vizsgázó az alakzat egyenlete helyett a hozzárendelés képletét adja meg.*

6.		
		
Szemléltetés.	1 pont	*Csak hibátlan hálózatra adható az 1 pont.*
A fokszámok összege: 14.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

7.		
Nem minden nagymama szereti az unokáját. vagy: Van olyan nagymama, aki nem szereti az unokáját.	2 pont	*Bármelyik helyes válasz 2 pontot ér.*
Összesen:	**2 pont**	

8.		
A hatványkitevő: $-\frac{1}{2}$.	2 pont	*A hatványkitevő bármilyen formában megadható.*
Összesen:	**2 pont**	*Ha válaszként* $10^{-\frac{1}{2}}$*-t ír, akkor 1 pontot kap.*

9.		
Az értékkészlet: $-1 \le y \le 3$, y valós szám, vagy [–1; 3].	2 pont	*Azt, hogy y valós szám, nem kell megadnia.*
Összesen:	**2 pont**	

10.		
A lehetséges elhelyezések száma: 12 (= 3·2·1·2).	3 pont	
Összesen:	**3 pont**	*Ha az összes elhelyezést nem, de legalább hatot felsorol, 1 pont adható.*

11.		
Az összes esetek száma: 90.	1 pont	
A kedvező esetek száma: 9.	1 pont	
A valószínűség: $\frac{9}{90} = 0{,}1$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

12.		
A kör egyenlete: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$.	1 pont	
A $P(1; -3)$ pont koordinátáit behelyettesítve: $25 = 25$,	1 pont	*A P pont és a kör középpontjának távolságával is számolhat.*
tehát a P pont illeszkedik a körre.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

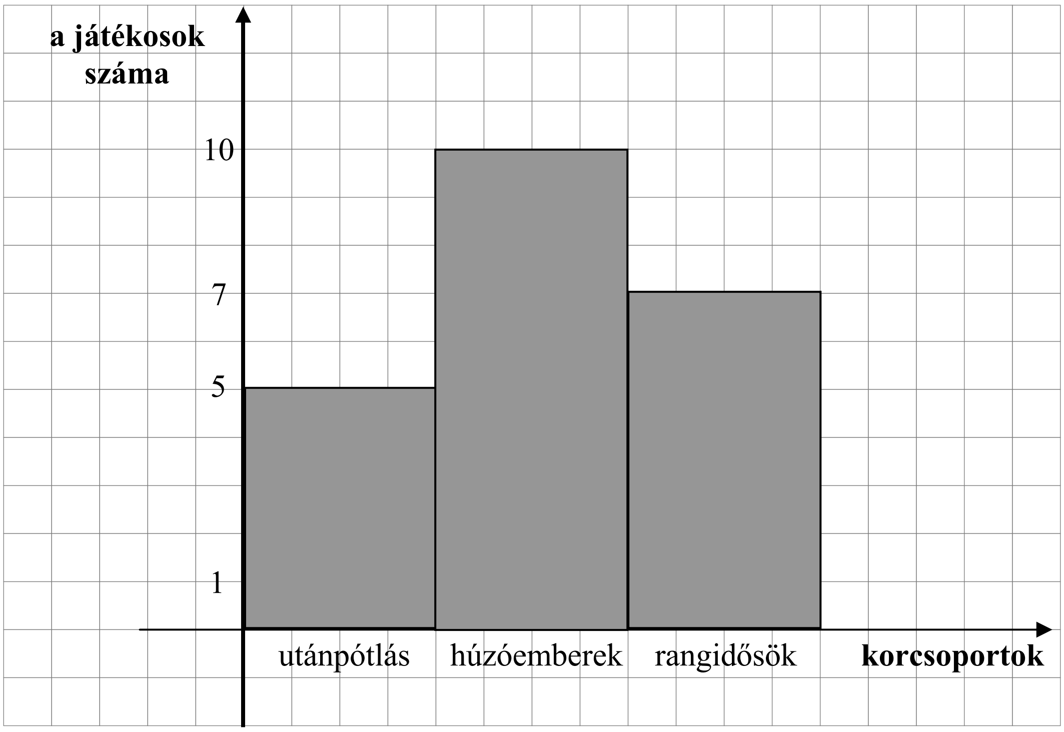
II./A

13.		
A logaritmus és a négyzetgyökvonás értelmezése miatt $x > \frac{2}{3}$ *és* $x > \frac{7}{4}$,	1 pont*	
vagyis $x > \frac{7}{4}$ esetén értelmezett az egyenlet.	1 pont*	
A logaritmus azonosságának felhasználásával $\lg\left(\sqrt{3x-2}\cdot\sqrt{4x-7}\right) = \lg 2$.	2 pont	
A tízes alapú logaritmus függvény szigorúan monoton növekedő, ezért $\sqrt{3x-2}\cdot\sqrt{4x-7} = 2$.	1 pont	*Indoklás nélkül is jár az 1 pont.*
A négyzetre emelés után $(3x-2)\cdot(4x-7) = 4$.	1 pont	
A műveletek elvégzése és rendezés után $12x^2 - 29x + 10 = 0$.	2 pont	
Az egyenlet megoldásai $x_1 = 2$; $x_2 = \frac{10}{24}\left(= \frac{5}{12}\right)$.	2 pont	
Ellenőrzés: az $x_1 = 2$ gyököt behelyettesítve igaz egyenlőséget kapunk.	1 pont	
Az $x_2 = \frac{5}{12}$ nem gyöke az egyenletnek.	1 pont	** Ha nem végzi el az alaphalmaz szűkítését, de az ellenőrzés jó, akkor is jár az 1+ 1 pont.*
Összesen:	**12 pont**	

14. a)		
Az esernyő AB hosszára felírjuk a koszinusztételt: $AB^2 = 25^2 + 60^2 - 2\cdot 25\cdot 60\cdot\cos 120°$.	3 pont	*A koszinusztétel alkalmazhatóságának felismerése 2 pont, jó behelyettesítés 1 pont.*
$AB^2 = 5725$	1 pont	
$AB = \sqrt{5725} \approx 76$ cm az esernyő hossza.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

14. b)		
Ha az A végponttól mért kötélszár hossza x, akkor a másik $85 - x$.	1 pont	*Az 1 pont akkor is jár, ha a megfelelő felbontás a Pitagorasz-tétel felírásából derül ki.*
A derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel szerint: $x^2 + (85 - x)^2 = 5725$.	1 pont	
$x^2 + 85^2 + x^2 - 170x = 5725$	1 pont	*A négyzetre emelés elvégzése.*
$x^2 - 85x + 750 = 0$	1 pont	*Az összevonásért.*
A másodfokú egyenlet gyökei: 75 és 10.	2 pont	
A derékszögű csúcs az A végponttól 75 cm-re vagy 10 cm-re lehet.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

15. a)



Összesen:	**4 pont**	*A korcsoportonkénti szétválasztás 2 pont, a tengelyek felirata 1 pont, az ábrázolás 1 pont.*

15. b)		
A csapat átlagéletkora: $\frac{19+20+3\cdot 21+2\cdot 22+3\cdot 23+24+4\cdot 25+3\cdot 26+27+3\cdot 28}{22}=$ $=\frac{528}{22}=24$ év.	3 pont	*Számolási hiba esetén legfeljebb 2 pont adható.*
Összesen:	**3 pont**	

15. c)		
A négy fő 25 évesből kettőt kiválasztunk: $\binom{4}{2}$-féleképpen (= 6). A három fő 28 évesből kettőt kiválasztunk: $\binom{3}{2}$-féleképpen (= 3).	3 pont	*A kiválasztási modell megtalálása 1 pont, a két eset 1-1 pont. (A kombinatorikus képletek nélkül megadott jó válaszok is teljes értékűek.)*
Az öt fő kiválasztása 6·3·1 = 18-féleképpen történhet.	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	*Indoklás nélkül legfeljebb 2 pont adható.*

II./B

16. a)		
20 000 Ft 2,5%-a 500 Ft, a kezelési költség.	1 pont	
19 500 Ft-ért $19\,500 \cdot 146 = 2\,847\,000$ lejt kap kézhez.	2 pont	*284,7 ÚJ LEJ-ként is elfogadható a válasz.*
Összesen:	**3 pont**	

16. b)		
300 ÚJ LEJ = 3 000 000 lej	1 pont	
Ha x Ft-ért kapja meg ezt a pénzt, akkor $x \cdot 0{,}975 \cdot 146 = 3\,000\,000$.	3 pont	
Ebből $x = 21\,075$ Ft.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	*Számolási hiba esetén legfeljebb 4 pontot kap.*

16. c)		
1 ÚJ LEJ = $\frac{10000}{146}$ Ft = 68,49 Ft	3 pont	*Számolási hibáért, hibás kerekítésért 1-1 pont levonandó.*
Összesen:	**3 pont**	

16. d)		
A nyolc érme közül véletlenszerűen $\binom{8}{4}$-féleképpen választunk ki négyet, tehát az összes eset 70.	1 pont	*Nem kívánjuk meg annak kimondását, hogy ezek mindegyike azonos valószínűséggel adódhat.*
A „jó” eset négy pénzérméből csak úgy állhat elő, hogy $90 = 50 + 20 + 10 + 10$.	1 pont	
Az egy darab 50-est egyféleképpen, az egy darab 20-ast a háromból háromféleképpen, a két darab 10-est a négyből hatféleképpen választhattuk.	2 pont	
90 ÚJ BANI tehát $1 \cdot 3 \cdot 6 = 18$-féleképpen akadhatott a pénztáros kezébe.	1 pont	
A valószínűség: $\frac{18}{70} \approx 0{,}2571$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

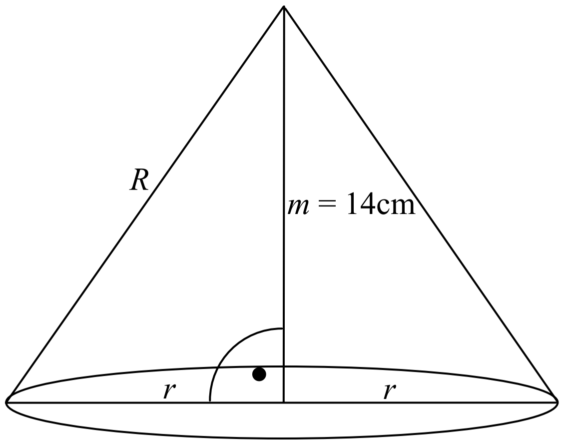
17. a)		
$a_3 = 5 \cdot q^2$, $a_5 = 5 \cdot q^4$.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

17. b)		
$a_4 = 5 + 3d$, $a_{16} = 5 + 15d$.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

17. c)		
$5 \cdot q^2 = 5 + 3d$, $5 \cdot q^4 = 5 + 15d$.	2 pont	
d - t kiküszöbölve: $q^4 - 5 \cdot q^2 + 4 = 0$.	3 pont	*Az első egyenletet négyzetre emelve q-t is kiejthetjük, és ekkor $d(d-5) = 0$.*
Behelyettesítve a q^2-re másodfokú egyenlet együtthatóit a megoldóképletbe,	1 pont	
$q^2 = 1$ vagy 4 adódik.	2 pont	
Innen q-ra ± 1, illetve ± 2.	2 pont	*Ha csak a pozitív értékeket adja meg, 1 pontot kap.*
d értékei rendre: 0, illetve 5.	1 pont	
A megoldásoknak a szövegbe való behelyettesítése.	2 pont	
Összesen:	**13 pont**	

18. a)		
A 31,4 cm-es oldal a henger alapkörének kerületét adja: $31,4 = 2r \cdot \pi$.	1 pont	
$r \approx 5$ (cm)	1 pont	
$V_{henger} = r^2 \cdot \pi \cdot 14$	1 pont	
A henger térfogata $\approx 1,1$ dm^3.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. b)



Összesen:	**2 pont**	

18. c)

A félkörív $R\cdot\pi$ hosszúsága a kúp alapkörének kerületét adja, $R\cdot\pi = 2r\cdot\pi$;	1 pont*	*Indoklás nélkül is jár az 1 pont.*
tehát $r = \frac{R}{2}$.	1 pont	**Bármilyen helyes indoklás után a jó arány megállapítása esetén is jár az 1+ 1 pont.*
Az $\frac{R}{2}$, a 14 és a R oldalakkal rendelkező derékszögű háromszögre felírjuk a Pitagorasz-tételt:	1 pont	
$\frac{R^2}{4} + 14^2 = R^2$.	1 pont	
Az egyenletből: $R = \frac{28}{\sqrt{3}} \approx 16{,}2$ cm.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

18. d)		
Az alapkör területe: $r^2 \cdot \pi$.	1 pont	*≈ 206 cm²(itt r ≈ 8,1 cm)*
A kúppalást területe: $\frac{R^2\pi}{2}$.	1 pont	*≈ 412 cm²*
A területek aránya: $\frac{r^2\pi}{0{,}5 \cdot R^2\pi} = \frac{2r^2}{R^2}$	1 pont	
Beírva az $r = \frac{R}{2}$ kifejezést:	1 pont*	*Konkrét értékekkel való számolás esetén erre a sorra nincs szükség.*
a területek aránya: $\frac{1}{2}$.	1 pont	** A helyes arány megállapítása esetén is jár az 1 + 1 pont.*
Összesen:	**5 pont**	