Beurteilungsanweisung für die Abituraufgaben im Fach Mathematik

1. (1325.) Subtrahiert man vom Zähler eines Bruches 1 und addiert man zum Nenner 1, so erhält man den Wert $\frac{1}{2}$. Addiert man zum Zähler 1 und subtrahiert man vom Nenner 1, so erhält man den Wert 1. Welcher Bruch ist das?

Lösung:
Sei x der Zähler des Bruches und y der Nenner. 1 Punkt
Laut der Bedingung:

einerseits: $\frac{x-1}{y+1}=\frac{1}{2}$, und andererseits: $\frac{x+1}{y-1}=1$. 2 Punkte

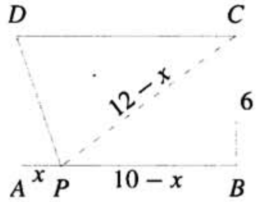
Die Lösung dieses Gleichungssystems ist: $x=5$ und $y=7$. 4 Punkte
Dies befriedigt tatsächlich die Bedingungen, weil

$\frac{5-1}{7+1}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ und $\frac{5+1}{7-1}=\frac{6}{6}=1$. 1 Punkt

Also der originale Bruch ist $\frac{5}{7}$. 1 Punkt

Insgesamt: 9 Punkte

2. (1832.) Die Seiten des Rechtecks $ABCD$ sind $AB=10$ cm und $BC=6$ cm. Wie groß ist der Abstand zwischen D und dem Punkt P auf der Seite AB, für welchen $AP+PC=12$ cm besteht?



Lösung:
Sei x die Länge von AP, 1 Punkt
dann:
(1) $PB=10-x$.
Aus der Bedingung $AP+PC=12$ bekommt man:
(2) $PC=12-x$. 2 Punkte
Im rechtwinkligen Dreieck PBC laut des Satzes von Pythagoras:

$PC^2=PB^2+BC^2$. 1 Punkt

Nach dem Einsetzen der Gleichungen (1) und (2) bekommt man:

$$(12-x)^2=(10-x)^2+6^2,$$

woraus

$x=2$. 3 Punkte

(Da $x<AB$ ist, ist P tatsächlich ein innerer Punkt der Seite AB.)

Man kann den gesuchten Abstand DP aus dem rechtwinkeligen Dreieck DAP auch mit Hilfe des Satzes von Pythagoras bestimmen:

$$DP^2 = x^2 + 6^2,$$ 2 Punkte

und daraus:

$$DP = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} (\approx 6.32\text{cm}) .$$ 1 Punkt

Also ist der Abstand zwischen dem Punkt P und dem Eckpunkt D $2\sqrt{10}$ cm groß. 1 Punkt

Insgesamt: 11 Punkte

Bemerkung: Bekomme der Schüler die volle Punktzahl auch dann, wenn er nur den abgerundeten Wert ($6,32$) angibt.

3. (3369.) Es ist die Gleichung des Kreises zu bestimmen, dessen Mittelpunkt $O(-3;-2)$ ist und der die Gerade $2x + y = 3$ berührt!

Erste Lösung:

Die Gleichung des Kreises mit dem Radius r dessen Mittelpunkt $O(-3;-2)$ ist lautet:

(1) $$(x+3)^2 + (y+2)^2 = r^2 .$$ 2 Punkte

Da die Tangente und der Kreis nur einen gemeinsamen Punkt haben, muss das aus den Gleichungen der Gerade und des Kreises bestehende Gleichungssystem nur eine Lösung haben, was ermöglicht die Bestimmung des Parameters r .

$$\left.\begin{aligned} (x+3)^2 + (y+2)^2 = r^2 \\ 2x + y = 3 \end{aligned}\right\}$$ 4 Punkte

Nach dem Einsetzen und nach dem Ordnen bekommt man die folgenden Gleichung:

(2) $$5x^2 - 14x + 34 - r^2 = 0 .$$ 3 Punkte

Die Gerade ist die Tangente des Kreises, wenn die Gleichung (2) eine einzige reelle Lösung hat. Dies erfüllt sich dann und nur dann, wenn die Diskriminante der Gleichung (D) Null ist:

$$D = 14^2 - 20 \cdot (34 - r^2) = 0 .$$ 3 Punkte

Daraus: $r^2 = 24,2$. 1 Punkt

Die Gleichung des gesuchten Kreises ist:

$$(x+3)^2 + (y+2)^2 = 24,2 .$$ 1 Punkt

Insgesamt: 14 Punkte

Zweite Lösung:

Die Gleichung der aus den Punkt O auf die Tangente errichteten Senkrechte ist:

$$x - 2y = 1 .$$ 4 Punkte

Der Schnittpunkt dieser Gerade und der Tangente ist der Berührungspunkt (E), der ist aus dem folgenden Gleichungssystem berechenbar:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{aligned}\right\}$$

$$E(1,4;0,2) .$$ 4 Punkte

Die Länge des Radius ist die Entfernung zwischen den Punkten O und E , deshalb:

$$r^2 = (-3-1,4)^2 + (-2-0,2)^2 = (-4,4)^2 + (-2,2)^2 = 24,2 .$$ 3 Punkte

Die Gleichung des Kreises ist:

$$(x+3)^2 + (y+2)^2 = 24,2 .$$ 3 Punkte

Insgesamt: 14 Punkte

4. (3571.) In einer geometrischen Folge ist die Summe der ersten drei Glieder gleich 105. Das Produkt des ersten und des dritten Gliedes ist 400. Man gebe die Folge an!

Lösung:

Seien die ersten drei Glieder der gesuchten geometrischen Folge: a_1, a_2, a_3.

Laut der Bedingungen:

(1) $$a_1 + a_2 + a_3 = 105$$

und

(2) $$a_1 \cdot a_3 = 400.$$ 2 Punkte

Da es sich um eine geometrische Folge handelt, ist: $a_2 = a_1 \cdot q$, $a_3 = a_1 \cdot q^2$, also:

$$a_1 \cdot a_3 = a_1 \cdot a_1 q^2 = (a_1 q)^2 = a_2^2,$$

deshalb:

$$a_2 = \pm 20.$$ 3 Punkte

Daraus kommen die folgenden Gleichungen:

I. Wenn $a_2 = 20$ ist, dann kommt aus der Gleichung (1):

$$a_1 + a_3 = 85$$

und aus der Gleichung (2):

$$a_1 \cdot a_3 = 400.$$

Aus dem Gleichungssystem, bekommt man:

$$a_1^2 - 85a_1 + 400 = 0,$$

woraus:

$$a_1 = 5 \text{ oder } a_1 = 80.$$

Weil

$$a_1 q = a_2 \text{, also: } q = \tfrac{a_2}{a_1} \text{ ist,}$$

sind die Quotienten der entsprechenden Folgen: $q = 4$ oder $q = \frac{1}{4}$. 3* Punkte

II. Wenn $a_2 = -20$ ist, dann bekommt man aus der Gleichung (1):

$$a_1 + a_3 = 125$$

und aus der Gleichung (2):

$$a_1 \cdot a_3 = 400.$$

Aus dem Gleichungssystem bekommt man die folgenden Gleichung:

$$a_1^2 - 125a_1 + 400 = 0,$$

und daraus:

$$a_1 \approx 121{,}71 \text{ oder } a_1 \approx 3{,}2864,$$

beziehungsweise:

$$q \approx -0{,}1643 \text{ oder } q \approx -6{,}0857.$$ 3* Punkte

Die Lösungen der Aufgabe sind alle vier geometrischen Folgen:

wenn $a_1 = 5$, $q = 4$, dann ist die geometrische Folge: $5; 20; 80; \ldots$

wenn $a_1 = 80$, $q = \dfrac{1}{4}$, dann ist die geometrische Folge: $80; 20; 5; \ldots$

wenn $a_1 \approx 121{,}71$ $q \approx -0{,}16$, dann ist die geometrische Folge: $121{,}71; -20; 3{,}29; \ldots$

wenn $a_1 \approx 3{,}29$ $q \approx -6{,}09$, dann ist die geometrische Folge: $3{,}29; -20; 121{,}71; \ldots$

4 Punkte

Insgesamt: 15 Punkte

Bemerkungen:

Nach der Bestimmung des Gliedes a_2 kann man die Lösung auch so fortsetzen:

I. Wenn $a_2 = a_1 q = 20$ und $a_1 + a_1 q^2 = 85$, dann:

$$\frac{1+q^2}{q} = \frac{17}{4}, \text{ das heißt: } 4q^2 - 17q + 4 = 0.$$

Daraus sind q und a_1 bestimmbar.

II. Wenn $a_2 = a_1 q = -20$ und $a_1 + a_1 q^2 = 125$, dann:

$$\frac{1+q^2}{q} = -\frac{25}{4}, \text{ das heißt: } 4q^2 + 25q + 4 = 0.$$

Daraus sind q und a_1 bestimmbar.

Der Abschluß übereinkommt mit der geschriebenen Lösung. Für die richtige Ausarbeitung erteilt man die mit einem Sternchen (*) bezeichneten $3+3=6$ Punkte.

5. (1554.) Es ist die folgende Ungleichung auf der Menge der reellen Zahlen zu lösen! Die Lösungsmenge soll auf der Zahlengeraden dargestellt werden!

$$\log_3(x+3) > \log_3 2x.$$

Lösung:

Laut der Definition des Logarithmus sollen die folgenden Bedingungen erfüllt werden einerseits: $x+3>0$, das heißt

(1) $$x > -3;$$

andererseits: $2x > 0$, das heißt

(2) $$x > 0.$$

Der gemeinsane Teil der Bedingungen (1) und (2) ist:

(3) $$x > 0.$$ 3 Punkte

Die Funktion $\log_3 x$ wächst streng monoton, weil ihre Basis größer als 1 ist.

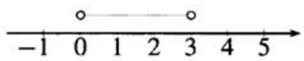
Deshalb: $$x+3 > 2x,$$ 2 Punkte

woraus ergibt sich:

(4) $$x < 3$$ 1 Punkt

Nach dem Vergleich der Ungleichungen (3) und (4), ist die Lösungsmenge der Ungleichung:

$$x \in]0;3[.$$ 1 Punkt

Ihre Darstellung:  1 Punkt

Insgesamt: 8 Punkte

6. (2490.) Man bestimme jene weiteste Teilmenge der Menge der reellen Zahlen, auf welcher der Ausdruck $\frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \cos x}$ erklärt ist!

Lösung:

$\cos x$ ist erklärt, wenn $x \in \mathbf{R}$. 1 Punkt

$\operatorname{tg} x$ ist erklärt, wenn $x \in \mathbf{R}$, $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, wobei $k \in \mathbf{Z}$. 2 Punkte

Der Bruch ist erklärt, wenn sein Nenner nicht gleich 0 ist, das heißt:

$$\operatorname{tg} x \cdot \cos x \neq 0,$$ 1 Punkt

das ist gleichwertig mit folgendem:

$$\operatorname{tg} x \neq 0 \text{ und } \cos x \neq 0,$$ 2 Punkte

das heißt:

$$x \in \mathbf{R}, \ \left\{m\pi; \tfrac{\pi}{2} + n\pi\right\}, \text{ wo } m, n \in \mathbf{Z}.$$ 2 Punkte

Nach dem Vergleich der Bedingungen, ist der Ausdruck erklärt, wenn:

$$x \in \mathbf{R}, \quad \left\{p \cdot \tfrac{\pi}{2}; p \in \mathbf{Z}\right\}.$$ 2 Punkte

Insgesamt: 10 Punkte

7. (63.) Beweise, daß die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks das geometrische Mittel der Hypotenuse und der senkrechten Projektion dieser Kathete auf der Hypotenuse ist!

Lösung:
Für einen richtigen und vollständigen Beweis sind 13 Punkte zu erteilen.
Für einen unvollständigen Beweis sind proportional wenigere Punkte zu erteilen.

Insgesamt: 13 Punkte

B E W E R T U N G

Die erreichte Punktzahl wird wie folgt in Zensuren umgerechnet:

0–17 Punkte Ungenügend (1).
ab 60 Punkte Vorzüglich (5).

Von der unteren Punktgrenze für „Vorzüglich" (60 P.) und von der unteren Punktgrenze für „Genügend" (18 P.) ist nur in begründeten Einzelfällen abzuweichen und auch dann nur um höchstens ± 3 Punkte.

Für die dazwischenliegenden Zensuren ist entsprechend der üblichen Vorgehensweise zu verfahren.

Für richtige Lösungen, die von dem in dieser Anweisung dargelegten Lösungsweg abweichen, ist selbstverständlich die volle Punktzahl zu erteilen; dabei sind Teilpunktzahlen entsprechend den einzeln bewertbaren Lösungsschritten ebenfalls anteilmäßig zu vergeben.

Falls in dieser Anweisung nicht anders vorgeschlagen ist, so ist im Falle eines einfachen Rechenfehlers für den entsprechenden Lösungsschritt kein Punkt zu erteilen; für die anderen Schritte – falls diese auch beim richtigen Lösungsweg auftreten – können die jeweiligen Teilpunktzahlen vergeben werden.

Die in den Bewertungskriterien vorliegenden Teilpunktzahlen dürfen wohlbegründet weiter geteilt werden. Es ist nur je eine richtige Lösung pro Aufgabe zu punkten.

Falls der Schüler (vor Abgabe seiner Arbeit) die Lösung verändert, so muß dies in eindeutiger und klar erkennbarer Weise geschehen; der Lehrer hat die neue (bzw. die nicht durchgestrichene) Lösungsvariante zu beurteilen.

Am Ende der Arbeit sind die für die einzelnen Aufgaben erteilten Punktzahlen sowie deren Summe und die entsprechende Note anzugeben und vom Lehrer zu unterschreiben.